

WECHSELWIRKUNG EINES INZIDENTEN PHOTONS MIT
ZWEI ANGEREGTEN ATOMEN IN EINER WEISSKOPF-
WIGNER THEORIE

Michael Stelzer

1976

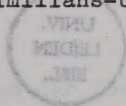
WECHSELWIRKUNG EINES INZIDENTEN PHOTONS MIT ZWEI ANGEREGTEN
ATOMEN IN EINER WEISSKOPF-WIGNER THEORIE

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades für

den Fachbereich Physik der

Ludwig-Maximilians-Universität zu München



vorgelegt von

Michael Stelzer

München

1976

1. Berichterstatter: Priv. Doz. Dr. V. Ernst

2. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Walther

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Juli 1976



Inhaltsverzeichnis

§1. Einleitung und Diskussion der Ergebnisse	1
§2. Die Weisskopf-Wigner Theorie	
§2.1 Allgemeine physikalische Prinzipien	6
§2.2 Postulate zum Existenzsatz der Weisskopf-Wigner Theorie	7
§2.3 Die Weisskopf-Wigner-Näherung	10
§3. Lösungen der Bewegungsgleichungen	
§3.1 Abtrennung des inzidenten Photons	13
§3.2 Separation des Winkelanteils für das Gleichungs- system des inzidenten Photons	17
§3.3 Auflösung des Radialgleichungssystems	20
§3.4 Über den Gebrauch der Exponentialnäherung zur Lösung der radialen Gleichungen	26
§4. Interpretation der Lösungen	
§4.1 Der Prozeß Nullter Ordnung: zwei angeregte Atome	31
§4.2 Der Prozeß Erster Ordnung: zwei angeregte Atome und ein inzidentes Photon	36
§4.3 Zusammenfassung	40
Anhang A: Ansatz für n inzidente Photonen und zwei angeregte Atome mit faktorisierender Anfangsamplitude	42

Anhang B: Laplace-Rücktransformationen der Lösungen Nullter und Erster Ordnung in der Exponentialnäherung	47
Anhang C: Über die Integralgleichungen im Prozeß Nullter Ordnung	55
Anhang D: Über die Integralgleichung bei Prozessen von einem Atom und zwei Photonen	59
Literaturverzeichnis	61

§1. Einleitung und Diskussion der Ergebnisse

In typischen quantenoptischen Prozessen (Laseraktivität, Superstrahlung,...) werden kohärente Lichtimpulse erzeugt, die sich aus ca. $10^6 - 10^{20}$ Photonen aufbauen. Will man solche Prozesse nach den Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik behandeln, so ist eine Entwicklung nach Potenzen in der Kopplungskonstanten α und Renormierung bis zur Ordnung $n \sim 10^6 - 10^{20}$ notwendig. Deshalb ist für quantenoptische Probleme die Störungsrechnung als Näherungsverfahren denkbar schlecht geeignet. Wir wollen daher in dieser Arbeit auf ein anderes Näherungsverfahren zurückgreifen, welches der physikalischen Natur von Emissions- und Absorptionsprozessen der Photonen von gebundenen Elektronen angepaßt ist. Die ursprüngliche Idee geht zurück auf DIRAC[1] und WEISSKOPF und WIGNER[2] in der Behandlung endlicher Breiten der Emissionslinie von Atomen. Sie wurde von ERNST und STEHLE[3] zu einem Näherungsverfahren für Emissionsprozesse vieler angeregter Atome erweitert und von GRIMM und ERNST[4] und STELZER, MÜHLSTEIN und ERNST[5] zu einem systematischen mathematisch abgeschlossenen Näherungsverfahren für Probleme der Emission und Absorption vieler Photonen und Atome entwickelt. Dieses Schema, Weisskopf-Wigner Theorie genannt, hat seine eigene Ordnungshierarchie, die nicht durch Potenzen der Kopplungskonstanten, sondern durch die physikalische "Wichtigkeit" der Zustände im Hilbertraum $\mathcal{H}(I)$ des gekoppelten Systems von gebundenen Elektronen und Photonen charakterisiert ist.

Typische quantenoptische Probleme verlangen Aussagen über die Wechselwirkung vieler Atome mit vielen Photonen. Als

Vorbereitung für solche Aufgaben diskutieren wir in dieser Arbeit eine Weisskopf-Wigner Theorie für die Wechselwirkung dreier Photonen mit zwei Atomen, wobei wir die Anfangsbedingung stellen, daß ein Photon auf zwei angeregte Atome fallen soll. Dazu betrachten wir zwei nichtüberlappende Zwei-Niveau Dirac-atome mit je einem individuellen Potential, die an den Orten $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$ fest fixiert sind. Beim Übergang vom oberen Zustand $u_{b_j}(\underline{x})$ zum unteren $u_{a_j}(\underline{x})$ ($j=1,2$) und umgekehrt wird genau ein Photon emittiert (absorbiert). Wir fordern für die Energiedifferenz $\Delta = \Delta_j := E_{b_j} - E_{a_j} \gg \varepsilon_{b_j, a_j}$, wobei ε_{b_j, a_j} die Größenordnung des Lambshifts hat. Dadurch vermeiden wir Probleme, die mit "gebundenen" Photonen auftreten [6], was in der Quantenoptik immer gerechtfertigt ist.

Die physikalisch "wichtigen" Zustände für unser Problem sind: beide Atome angeregt und ein Photon existent; ein Atom angeregt, eines im Grundzustand und zwei Photonen existent; beide Atome im Grundzustand und drei Photonen existent. Alle anderen Zustände sind "unwichtig" und werden nicht berücksichtigt. Die Auswahl der "wichtigen" Zustände wird bestimmt aus der reichhaltigen Erfahrung, die in der Atomphysik gemacht wurde, daß nach der Bohr'schen Frequenzbedingung $E_2 - E_1 = \hbar\omega$ nur ein Photon der Energie $\hbar\omega$ zwischen zwei benachbarten Energieniveaus emittiert oder absorbiert werden kann. Nach [4,5] existiert für unser Problem immer eine endliche eindeutige Lösung. Unsere Aufgabe besteht darin, die Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichungen für die Fockraumamplituden dieser Zustände unserer Weisskopf-Wigner Theorie zu den genannten Anfangsbedingungen explizite anzugeben und zu diskutieren. Dies geschieht in drei Schritten:

a) wir machen einen Ansatz, der uns das einfallende Photon

aus dem Gleichungssystem "herauspräpariert". Dies führt auf zwei hierarchisch gegliederte Gleichungssysteme. Eines davon, das Gleichungssystem Nullter Ordnung, beschreibt den spontanen Zerfall zweier angeregter Atome, der bereits bei ERNST und STEHLE [3] ausführlich diskutiert wurde. Die Lösungen sind im Anhang B angegeben. Darauf baut sich das Gleichungssystem Erster Ordnung auf, das den Einfluß des inzidenten Photons auf die beiden angeregten Atome in einem zusätzlichen "inhomogenen Term" berücksichtigt, welcher auch die Lösung der Nullten Ordnung enthält.

b) Für das Gleichungssystem Erster Ordnung machen wir einen weiteren Ansatz, der uns die Winkelabhängigkeit aus den Schrödingeramplituden im Impulsraum absepariert, so daß ein "radiales" Gleichungssystem übrig bleibt, welches nur dynamische Effekte beschreibt. Dieser Ansatz ist bemerkenswert, da einmal das Aufsuchen der Lösung extrem vereinfacht wird, zum anderen sind etwaige Korrelationseffekte zwischen den verschiedenen Emissionsrichtungen der Photonen nur von den charakteristischen Eigenschaften der Atome wie Struktur und Lage abhängig [3,7], während die Dynamik zwischen Atome und Photonen keinen Einfluß auf die Emissionsrichtung hat.

c) Die Auflösung des radialen Gleichungssystem führt auf inhomogene Integralgleichungen, die im Rahmen einer Sekundärnäherung, der sog. Exponentialnäherung (E.N.), gelöst werden können. Die Näherung wird deshalb "exponential" genannt, weil sie das exponentielle Zerfallsgesetz der spontanen Emission liefert. Ihr Ursprung geht auf WEISSKOPF und WIGNER [2] zurück und hat sich in seiner Verallgemeinerung [3,8] als äußerst leistungsfähig und praktisch erwiesen. Durch die Anwendung der E.N. sind uns einige physikalische Effekte verloren ge-

gangen. Im Anhang C bzw. D zeigen wir sowohl für den Fall ein Atom und zwei Photonen wie auch für zwei angeregte Atome, daß es sich um Emissions-Reabsorptionsprozesse der Photonen durch das gleiche Atom bzw. die Atome handelt. Numerisch können wir sie wegen der hohen Ordnung in der Kopplungskonstanten vernachlässigen.

Die Analyse der Lösungen zeigt zwei bemerkenswerte Eigenschaften.

1. Komplexe Prozesse mit inzidenten Photonen lassen sich aus einfacheren Zerfallsprozessen aufbauen. In unserem ^{/Falle} ist es der spontane Zerfall zweier angeregter Atome oder die Nullte Ordnung im Sinne der hierarchischen Gleichungssysteme. Der spontane Zerfall der beiden angeregten Atome läßt sich wiederum auf den Fall des spontanen Zerfalls zweier Atome mit einem Photon zurückführen, dem einfachsten Modell einer Wechselwirkung zwischen Atome und Photonen. Den Einfluß des inzidenten Photons auf zwei angeregte Atome können wir ebenfalls mit dem Mechanismus des spontanen Zerfallsprozesses beschreiben. Dies beruht auf der Tatsache, daß

2. die Wechselwirkung zwischen Photonen und Atome durch zwei grundlegende physikalische Prozesse bestimmt wird. Einmal haben angeregte Atome grundsätzlich die Tendenz spontan zu zerfallen. Dazu betrachten wir den Spezialfall, daß das inzidente Photon an den Atomen vorbeifliegt und keines zu irgendeiner Zeit überlappt. Dann bleibt nach dem Ansatz in a) nur das Gleichungssystem Nullter Ordnung übrig, d.h. die Atome zerfallen spontan. Zum anderen sind Atome im Grundzustand immer bereit Photonen zu absorbieren. Damit die beiden angeregten Atome das inzidente Photon absorbieren können, muß

eines der beiden Atome begonnen haben spontan zu zerfallen. Nachdem durch die Emission "Platz" für ein anderes Photon gemacht worden ist, kann das inzidente Photon absorbiert werden. Dann sind beide Atome wieder angeregt, die erneut im Sinne von ERNST und STEHLE [3] zerfallen können. Wir können sagen, daß sich Atome gegenüber Photonen wie Zähler verhalten, die keine anderen Photonen zählen (absorbieren) können, solange sie besetzt (angeregt) sind. Da die Dynamik zwischen Atome und Photonen durch Emissions- und Absorptionsprozesse bestimmt wird, spielt das zusätzliche inzidente Photon für die beiden angeregten Atome keine besondere Rolle. Es können aber schon vorhandene Korrelationseffekte zwischen den Photonen der beiden Atome durch das inzidente Photon verstärkt werden.

Im §2 spannen wir den allgemeinen Rahmen einer Theorie für die Quantenoptik auf, erläutern die Weisskopf-Wigner Theorie und geben Bedingungen an, unter denen sie für alle Zeiten $t \rightarrow \infty$ endliche Resultate garantiert. Der §3 ist aufgeteilt in drei Abschnitte, die die verschiedenen Lösungsschritte darstellen. Im §4 analysieren wir die Dynamik zweier angeregter Atome, um uns die notwendigen Begriffe und Vorstellungen zu verschaffen, die wir dann für die Wechselwirkung eines inzidenten Photons mit zwei angeregten Atomen benötigen. Im Anhang A formulieren wir einen Ansatz für n inzidente Photonen und zwei angeregte Atome mit faktorisierender Anfangsamplitude; während im Anhang B die Lösungen der Ein-, Zwei- und Dreiphotonenamplitude im (k, t) -Raum angegeben sind. Im Anhang C und D diskutieren wir die Integralgleichungen der exakten Theorie an zwei Beispielen.

§2. Die Weisskopf-Wigner Theorie

In diesem § wollen wir neben den notwendigen Bezeichnungen auch die Voraussetzungen erläutern, auf deren Basis die Weisskopf-Wigner Theorie nach [4,5] endliche Resultate liefert.

§2.1 Allgemeine physikalische Prinzipien

[5] folgend, stellen wir drei Grundforderungen auf, von denen wir annehmen, daß sie für eine vernünftige Theorie der Quantenoptik gelten.

1. Der Dualismus des Lichtes [9] verlangt eine Quantisierung des elektromagnetischen Feldes R .

2. Emission und Absorption von Photonen durch verschiedene Atome in einem gemeinsamen Raumgebiet sind statistisch nicht unabhängig [10,15]. Deshalb müssen alle aktiven Atome an ein gemeinsames Strahlungsfeld gekoppelt werden.

Sei $\underline{A}(\underline{x}, t)$ der Heisenbergoperator der Observablen "Vektorpotential" des Strahlungsfeldes R der transversalen Photonen und $\Psi^j(\underline{x}, t)$ der Heisenbergoperator der verallgemeinerten "Orts"-Amplitude des mit dem aktiven Atom A_j , $j=1, \dots, J$, verknüpften Fermionfeldes. A_j sei durch ein "individuelles" Potential, das durch eine reelle c -Zahl Funktion $V^j(\underline{x}-\underline{x}^j)$ gegeben ist, um den Punkt $\underline{x}^j$ fest lokalisiert. Sei m_0 die Masse des Elektrons, e die Kopplungskonstante und $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ die gewöhnlichen Diracmatrizen. Dann wird die Kopplung der Atome an das Strahlungsfeld durch folgende Heisenberggleichung wiedergegeben:

$$i \frac{d}{dt} \psi^j(\underline{x}, t) = (-i \underline{\alpha} \nabla + \beta m_0 + V^j(\underline{x} - \underline{x}^j) + e \underline{\alpha} \underline{A}(\underline{x}, t)) \psi^j(\underline{x}, t) \quad (2.1 a)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{A}(\underline{x}, t) = e \sum_{j=1}^J \left(\psi^{*j}(\underline{x}, t) \underline{\alpha} \psi^j(\underline{x}, t) \right)_{t^+} \quad (2.1 b)$$

Die Observable $\underline{A}(\underline{x}, t)$ wirkt in (2.1a) wie ein zusätzliches "Potential, während (2.1 b) alle Atome als Quelle eines Feldes hat; d.h. alle Atome sind durch das Feld R verkoppelt. Dadurch "verlieren" die Atome ihre Individualität und treten als Kollektiv in Erscheinung. Viele Autoren [3, 10-14] haben gezeigt, daß diese Viel-Photonen-Kollektiv-Phänomene mit Laser- und Superstrahlung identifiziert werden müssen.

3. Die Photonen sollten sich als Träger von Signalen nach allen Richtungen kausal ausbreiten können [16]. Deshalb ist es notwendig, einen vollständigen Modensatz in R anzunehmen, so daß Gleichung (2.1) sowohl schwarze Strahlung als auch einen gerichteten Laserstrahl zuläßt.

§2.2 Postulate zum Existenzsatz der Weisskopf-Wigner Theorie

Um nach [4, 5] endliche Resultate zu bekommen, müssen wir einige Postulate einführen, deren Voraussetzungen in der Quantenoptik aber als erfüllt gelten dürfen.

1) Wir betrachten nichtüberlappende Ein-Elektronen-Atome $A_j, j=1, \dots, J$, für die je eine Dirac Gleichung in einem festen Potential $V^j(\underline{x} - \underline{x}^j)$ um den Ort $\underline{x}^j$ gegeben ist. $u_{a_j}^j(\underline{x} - \underline{x}^j)$ seien die orthonormalen und vollständigen Elektronen-Eigenlösungen zur diskreten Energie $E_{a_j}^j > 0$, wobei der Index a_j ein Satz von Quantenzahlen für das Atom A_j ist.

ii) Erzeugung und Vernichtung von Elektron-Positronpaaren spielt in der Quantenoptik keine Rolle. Das bedeutet, daß

der Schrödingeroperator $\psi^j(\underline{x})$ für das Atom A_j gegeben ist als:

$$\psi^j(\underline{x}) = \sum_{a_j} u_{a_j}^j(\underline{x}, \underline{x}^j) b_{a_j}^j \quad (2.2)$$

$b_{a_j}^j$ vernichtet ein Elektron im Zustand $u_{a_j}^j(\underline{x}, \underline{x}^j)$. Mit den entsprechenden Erzeugungsoperatoren $b_{a_j}^{+j}$ erfüllen sie die Antivertauschungsregeln. Für die Schrödingeroperatoren gelten die Antivertauschungsrelationen

$$[\psi^i(\underline{x}), \psi^j(\underline{x}')] = \delta(\underline{x} - \underline{x}') \quad \text{etc.} \quad (2.3)$$

iii) Der Zustandsraum aller Fermionfelder ist ein Fockraum. Ein Element $|f_e^j\rangle$ des Fermionfockraums $\mathcal{F}_e^j$, auf das der Operator $\psi^j(\underline{x})$ wirkt, habe die Form:

$$|f_e^j\rangle = f_e^j |v_e^j\rangle + \sum_{a_j^1} \sum_{a_j^2} \dots \sum_{a_j^j} f_{a_j^1, \dots, a_j^j}^j b_{a_j^1}^{+j} \dots b_{a_j^j}^{+j} |v_e^j\rangle \quad (2.4)$$

$|v_e^j\rangle$ ist das Vakuum in $\mathcal{F}_e^j$, mit $b_{a_j}^j |v_e^j\rangle = 0$ für alle a_j . $f_e^j \in \mathbb{C}$.

Die $f_{a_j^1, \dots, a_j^j}^j$ sind antisymmetrische c-Zahl Funktionen der diskreten Variablen $a_j^1, \dots, a_j^j$.

iv) Der Zustandsraum der transversalen Photonen ist ein Bose-Fockraum. Ein Element $|f_p\rangle$ des Fockraums $\mathcal{F}_p$ habe die Form [17]:

$$|f_p\rangle = f_p^0 |v_p\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-\frac{1}{2}} \int d^3x_1 \dots \int d^3x_n f_n^p(x_1, \dots, x_n) a_{x_1}^+ \dots a_{x_n}^+ |v_p\rangle \quad (2.5)$$

$|v_p\rangle$ ist das Photonen Vakuum mit $a_{\underline{x}} |v_p\rangle = 0$ für alle $\underline{x} \in \mathcal{K}$. $\underline{x} = (\underline{k}, \lambda)$

faßt den Wellenvektor $\underline{k} \in \mathbb{R}^3$ und den Polarisationsindex $\lambda \in \{1, 2\}$ aus der Menge $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}$ zusammen. $\int d^3x$ umfaßt die Integration über $\underline{k} \in \mathbb{R}^3$ und die Summation über $\lambda \in \{1, 2\}$. $a_{\underline{x}}$ und $a_{\underline{x}}^+$ sind die Bose Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren, die der Bedingung $[a_{\underline{x}}, a_{\underline{x}'}^+] = \delta(\underline{k} - \underline{k}') \delta_{\lambda\lambda'}$ genügen. $f_n^p \in \mathbb{C}$. Die $f_n^p(x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 1$, sind Lebesgue quadratintegrierbare, symmetrische orthogonale c-Zahl Funktionen von n Argumenten $x_1, \dots, x_n$. Der Schrödinger-

operator $\underline{A}(\underline{x})$ des Strahlungsfeldes R ist als Operator auf $\mathcal{F}^P$ gegeben durch:

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\underline{k} \frac{\underline{\epsilon}(\underline{k})}{(2\omega(\underline{k}))^{1/2}} \left(e^{i\underline{k}\underline{x}} a_{\underline{k}} + e^{-i\underline{k}\underline{x}} a_{\underline{k}}^* \right) \quad (2.6)$$

$\underline{\epsilon}(\underline{k})$ ist der Polarisationsvektor mit $\underline{k} \cdot \underline{\epsilon}(\underline{k}, \lambda) = 0$ und $\underline{\epsilon}(\underline{k}, \lambda_1) \cdot \underline{\epsilon}(\underline{k}, \lambda_2) = \delta_{\lambda_1 \lambda_2}$.
 $\omega(\underline{k}) := \omega(\underline{k}) = \omega(|\underline{k}|) = |\underline{k}|$.

Die Vertauschungsrelationen der Schrödingeroperatoren $\underline{\dot{A}}(\underline{x})$ und $\underline{A}(\underline{x})$ lauten:

$$[\underline{\dot{A}}(\underline{x}), \underline{A}(\underline{x}')] = -i \delta(\underline{x} - \underline{x}') \quad \text{etc.} \quad (2.7)$$

v) Der Zustandsraum des Gesamtsystems $R + A_1 + \dots + A_J$ ist der Hilbertraum

$$\mathcal{H} := \mathcal{F}_R \otimes \mathcal{F}_{e_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{e_J} \quad (2.8)$$

$\otimes$ ist das gewöhnliche Tensorprodukt.

vi) Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems ist auf $\mathcal{H}$ definiert als:

$$H := \int d^3\underline{x} \omega(\underline{x}) a_{\underline{x}}^* a_{\underline{x}} + \sum_{j=1}^J \left[\int d^3\underline{x} \psi^{\dagger j}(\underline{x}) \left(\underline{\alpha} \cdot \left(-i \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \right) + m_0 \beta + V^j(\underline{x} - \underline{X}^j) \right) \psi^j(\underline{x}) + e \int d^3\underline{x} \underline{A}(\underline{x}) \left(\psi^{\dagger j}(\underline{x}) \underline{x} \psi^j(\underline{x}) \right)_{tr} \right] \quad (2.9)$$

vii) Für alle Paare $u_{a_j}^j(\underline{x}_j^j)$, $u_{a_j}^j(\underline{x}_j^j)$ von "wesentlichen" Eigenlösungen von A_j , ist das "atomare Übergangselement":

$$M^{ij}(a_j, a_j'; \underline{x}) = \frac{e \underline{\epsilon}(\underline{x})}{(2\pi)^{3/2} (2\omega(\underline{x}))^{1/2}} \int d^3\underline{x} e^{i\underline{k}\underline{x}} u_q^{ij}(\underline{x}') \underline{\alpha} u_{a_j}^j(\underline{x}) \quad (2.10)$$

ein Element aus $\mathcal{L}_2(\mathcal{H})$, was für diskrete Zustände des Dirac-

Atoms erfüllt ist [4].

viii) Nur eine endliche Anzahl von Photonen nimmt an der Wechselwirkung teil.

ix) Nur eine endliche Anzahl der Eigenzustände $u_{a_j}^j(x)$ jedes Atoms ist wesentlich; alle anderen werden als nicht existent betrachtet und daher vernachlässigt.

Unter den Voraussetzungen (i-ix) zeigen [4,5], daß für alle Zeiten $t < \infty$ ein unitärer Zeitentwicklungsoperator $U(t)$ für das wechselwirkende System existiert, der die Schrödinger-gleichung

$$i \frac{d}{dt} U(t) = H U(t) \quad U(0) = 1 \quad (2.11)$$

löst.

§2.3 Die Weisskopf-Wigner-Näherung

Der Hamiltonoperator H (2.9) vertauscht mit dem Elektronen-zahloperator

$$N^j = \sum_{a_j} b_{a_j}^{j\dagger} b_{a_j}^j, \quad (2.12)$$

d.h. die Zahl der Elektronen eines jeden Atoms bleibt konstant. Deshalb zerfällt der unitäre Zeitentwicklungsoperator $U(t)$ in eine direkte Summe von unitären Operatoren $U_{g_1, \dots, g_r}(t)$, die auf dem Unterraum

$$\mathcal{H}_{g_1, \dots, g_r} := \mathcal{H}_{e, g_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{e, g_r} \otimes \mathcal{F}_p \quad (2.13)$$

von $\mathcal{H}$ definiert sind. $\mathcal{H}_{e, g_i}$ ist der g_i -te Elektronen-Unterraum von $\mathcal{F}_e$. H ist ebenfalls eine direkte Summe

$$H = \bigoplus_{s_1=1} \dots \bigoplus_{s_r=1} H_{s_1, \dots, s_r} \quad (2.14)$$

von Hamiltonoperatoren auf $\mathcal{H}_{s_1, \dots, s_r}$. Daher können wir uns ohne Verlust auf Ein-Elektronen-Atome beschränken. Ein Element $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_{s_1, \dots, s_r} := \mathcal{H}$ hat die Form:

$$|\alpha\rangle = \sum_{a_1} \dots \sum_{a_r} \sum_{n=0}^{\infty} (u_1)^{-k} \int dx_1 \dots \int dx_n u[a_1, \dots, a_r]_n(x_1, \dots, x_n) a_{a_1}^* \dots a_{a_n}^* b_{a_1}^{s_1} \dots b_{a_r}^{s_r} |v_s\rangle |v_p\rangle. \quad (2.15)$$

$|\alpha(t)\rangle = U_r(t)|\alpha\rangle$ bildet eine Kurve in $\mathcal{H}$, die durch die Schrödinger-gleichung

$$i \frac{d}{dt} |\alpha(t)\rangle = H_r |\alpha(t)\rangle \quad |\alpha(0)\rangle = |\chi\rangle \quad (2.16)$$

bestimmt ist mit einem beliebigen $|\chi\rangle \in \mathcal{H}$ als Anfangszustand.

Die Weisskopf-Wigner Theorie läßt sich nun folgendermaßen formulieren.

Sei $I = Q_1, \dots, Q_J, N^*(N^* = \{a_1, \dots, a_J\})$ eine endliche Indexmenge (§2.2), wobei Q_j eine endliche Anzahl von Quantenzahlen a_j der Zustände $u_{a_j}^j(\underline{x}^j)$ von A_j ist, von denen einige als physikalisch "wichtig" betrachtet werden sollen, je nach dem gewünschten Ziel. Dann setzen wir nach [3, 4, 5]

$$\alpha[t; a_1, \dots, a_J]_n(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \quad \text{falls } (a_1, \dots, a_J, n) \notin I \quad (2.17)$$

und vernachlässigen diese Amplituden für die Bewegungsgleichungen, d.h. wir beschränken uns auf alle Übergänge zwischen den Zuständen von $R+A_1 + \dots + A_J$ mit genau n Photonen und der Bedingung:

" A_1 befinde sich im Zustand $u_{a_1}^1(\underline{x}^1)$, ..., und A_J in Zustand $u_{a_J}^J(\underline{x}^J)$, wobei $(a_1, \dots, a_J, n) \in I$ sein soll. Der zugrundeliegende Hilbertraum, auf dem eine solche Weisskopf-Wigner

Theorie als Schrödingertheorie definiert ist, lautet nach [4,5]

$$\mathcal{H}(I) := \bigoplus_{(a_1, \dots, a_J, n) \in I} \mathcal{X}_n^{(a_1, \dots, a_J)} \quad (2.18)$$

Für diese Indexmenge lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \alpha[t; a_1, \dots, a_J]_n(x_1, \dots, x_n) &= (\omega(x_1) + \dots + \omega(x_n) + E_{a_1}^J + \dots + E_{a_J}^J) \alpha[t; a_1, \dots, a_J]_n(x_1, \dots, x_n) + \\ &+ (n+1)^{\frac{J}{2}} \sum_{j=1}^J \sum_{(a_1, \dots, a_{j-1}, a'_j, a_{j+1}, \dots, a_J, n+1) \in I} \int d^3x M^{ij}(X_{\sim}^i; a_j, a'_j; x) \alpha[t; a_1, \dots, a_{j-1}, a'_j, a_{j+1}, \dots, a_J]_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n) \\ &+ (n)^{-\frac{J}{2}} \sum_{j=1}^J \sum_{(a_1, \dots, a_{j-1}, a'_j, a_{j+1}, \dots, a_J, n-1) \in I} \sum_{v=1}^n M^{ij}(X_{\sim}^i; a'_j, a_j; x_v) \alpha[t; a_1, \dots, a_{j-1}, a'_j, a_{j+1}, \dots, a_J]_{n-1}(x_1, \dots, x_{v-1}, x_{v+1}, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.19)$$

zur Anfangsbedingung

$$\alpha[0; a_1, \dots, a_J]_n(x_1, \dots, x_n) = \chi[a_1, \dots, a_J]_n(x_1, \dots, x_n) \quad (a_1, \dots, a_J, n) \in I \quad (2.20)$$

mit dem atomaren Übergangselement

$$\begin{aligned} M^{ij}(X_{\sim}^i; a'_j, a_j; x) &= \frac{e f(x)}{(2\sigma)^{\frac{J}{2}} (2\omega(a_j))^{\frac{J}{2}}} \int d^3x' e^{i \frac{k}{2} x} u_{\frac{J}{2}}^{+i}(x - x') \alpha u_{\frac{J}{2}}^i(x - x') \\ &= e^{i \frac{k}{2} x} M^{ij}(a_j, a'_j; x) \end{aligned} \quad (2.21)$$

§3. Lösungen der Bewegungsgleichungen

§3.1 Abtrennung des inzidenten Photons

Für unser spezielles Problem der Wechselwirkung dreier Photonen mit zwei Atomen betrachten wir die Zwei-Niveau-Atome A_j , $j=1,2$, mit der Bedingung, daß das Atom bei einem Übergang vom oberen (unteren) zum unteren Zustand genau ein Photon emittieren (absorbieren) soll. Dann lautet die Indexmenge:

$$I = \{ (b_1, b_2; 1), (b_1, a_2; 2), (a_1, b_2; 2), (a_1, a_2; 3) \} \quad , \quad (3.1)$$

wobei a_j (b_j) der Index des Grundzustandes (des 1. angeregten Zustands) des Atoms A_j sein soll.

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$i \frac{d}{dt} \alpha [t; b_1, b_2]_1(x_1) = (\omega(x_1) + E_{b_1} + E_{b_2}) \alpha [t; b_1, b_2]_1(x_1) + (2)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^2 \int d^3x M_j^*(x) \alpha [t; a_j, b_{j+1}]_2(x, x_2) \quad (a)$$

$$i \frac{d}{dt} \alpha [t; b_1, a_2]_2(x_1, x_2) = (\omega(x_1) + \omega(x_2) + E_{b_1} + E_{a_2}) \alpha [t; b_1, a_2]_2(x_1, x_2) + (3)^{\frac{1}{2}} \int d^3x M_1^*(x) \alpha [t; a_1, a_2]_3(x, x_1, x_2) + (2)^{-\frac{1}{2}} \prod_{k_1, k_2}^{x_1, x_2} M_2(k_1) \alpha [t; b_1, b_2]_1(k_2) \quad (b)$$

$$i \frac{d}{dt} \alpha [t; a_1, b_2]_2(x_1, x_2) = (\omega(x_1) + \omega(x_2) + E_{a_1} + E_{b_2}) \alpha [t; a_1, b_2]_2(x_1, x_2) + (3)^{\frac{1}{2}} \int d^3x M_2^*(x) \alpha [t; a_1, a_2]_3(x, x_1, x_2) + (2)^{-\frac{1}{2}} \prod_{k_1, k_2}^{x_1, x_2} M_1(k_1) \alpha [t; b_1, b_2]_1(k_2) \quad (c)$$

$$i \frac{d}{dt} \alpha [t; a_1, a_2]_3(x_1, x_2, x_3) = (\omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_3) + E_{a_1} + E_{a_2}) \alpha [t; a_1, a_2]_3(x_1, x_2, x_3) + (3)^{-\frac{1}{2}} \prod_{k_1, k_2, k_3}^{x_1, x_2, x_3} \sum_{j=1}^2 M_j(k_1) \alpha [t; b_j, a_{j+1}]_2(k_2, k_3) \quad (d)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\alpha[0; b_1, b_2]_1(x_1) = \chi(x_1) \quad \alpha[0; b_j, q_{j+1}]_2(x_1, x_2) = \alpha[0; a_1, a_2]_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad j \bmod 2, \quad (3.3)$$

wobei $\chi(x_1)$ ein beliebiges, aber quadratintegrables Wellenpaket des inzidenten Photons darstellt mit der Normierungsbedingung

$$\int d^3x |\chi(x)|^2 = 1 \quad (3.4)$$

$$M_j^*(x) = M^{*j}(x^i; q_j, q_{j+1}; x); \quad E_{q_j} = E_{q_j}^i; \quad \sum_{k_1, \dots, k_n}^{x_1, \dots, x_n} f(k_1, \dots, k_n) := f(x_1, \dots, x_n) + f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n) + \dots$$

ist die formale Summe über alle Permutationen der Elemente $x_1, \dots, x_n$ [3, 18].

Um die physikalische Struktur von (3.2) durchsichtig zu machen, formulieren wir folgenden Satz 1.

Satz 1

Lösen $\beta[t; b_1, b_2]_0$, $\beta[t; b_j, q_{j+1}]_1(x_1)$ und $\beta[t; a_1, a_2]_2(x_1, x_2)$ folgendes Gleichungssystem

$$i \frac{d}{dt} \beta[t; b_1, b_2]_0 = (E_{b_1} + E_{b_2}) \beta[t; b_1, b_2]_0 + \sum_{j=1}^2 \int d^3x M_j^*(x) \beta[t; q_j, q_{j+1}]_1(x) \quad (a)$$

$$i \frac{d}{dt} \beta[t; b_j, q_{j+1}]_1(x_1) = (\omega(x_1) + E_{b_j} + E_{q_{j+1}}) \beta[t; b_j, q_{j+1}]_1(x_1) + \int d^3x M_1^*(x) \beta[t; a_1, a_2]_2(x, x_1) + M_2(x_1) \beta[t; b_1, b_2]_0 \quad (b)$$

(3.5)

$$i \frac{d}{dt} \beta[t; a_1, a_2]_2(x_1, x_2) = (\omega(x_1) + E_{a_1} + E_{a_2}) \beta[t; a_1, a_2]_2(x_1, x_2) + \int d^3x M_2^*(x) \beta[t; q_1, q_2]_1(x, x_1) + M_1(x_1) \beta[t; b_1, b_2]_0 \quad (c)$$

$$i \frac{d}{dt} \beta[t; a_1, a_2]_2(x_1, x_2) = (\omega(x_1) + \omega(x_2) + E_{a_1} + E_{a_2}) \beta[t; a_1, a_2]_2(x_1, x_2) + \sum_{k_1, k_2}^{x_1, x_2} \sum_{j=1}^2 M_j^*(k_1) \beta[t; b_j, q_{j+1}]_1(k_2) \quad (d)$$

zur Anfangsbedingung

$$\beta[0; b_1, b_2]_0 = 1, \quad \beta[0; b_j, q_{j+1}]_1(x_1) = \beta[0; a_1, a_2]_2(x_1, x_2) = 0, \quad (3.6)$$

und lösen ebenfalls $\psi[\bar{t}; b_1, b_2]_1(x_1)$, $\psi[\bar{t}; b_j, q_{j+1}]_2(x_1, x_2)$ und $\psi[\bar{t}; a_1, a_2]_3(x_1, x_2)$
das Differentialgleichungssystem

(3.7)

$$i \frac{d}{dt} \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_1(x_1) = (\omega(x_1) + E_{b_1} + E_{b_2}) \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_1(x_1) + \sum_{j=1}^2 \int d^3x M_j^*(x) \psi[\bar{t}; q_j, b_{j+1}]_2(x, x_1) \\ + \sum_{j=1}^2 g_j(t) \beta[\bar{t}; a_j, b_{j+1}]_1(x_1) \quad (a)$$

$$i \frac{d}{dt} \psi[\bar{t}; b_1, a_2]_2(x_1, x_2) = (\omega(x_1) + \omega(x_2) + E_{b_1} + E_{a_2}) \psi[\bar{t}; b_1, a_2]_2(x_1, x_2) + \int d^3x M_1^*(x) \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_3(x, x_1, x_2) \\ + \overline{P}_{b_1, b_2}^{x_1, x_2} M_2(x_1) \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_1(x_2) + g_1(t) \beta[\bar{t}; a_1, a_2]_2(x_1, x_2) \quad (b)$$

$$i \frac{d}{dt} \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_3(x_1, x_2) = (\omega(x_1) + \omega(x_2) + E_{a_1} + E_{a_2}) \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_3(x_1, x_2) + \int d^3x M_2^*(x) \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_3(x, x_1, x_2) \\ + \overline{P}_{a_1, a_2}^{x_1, x_2} M_1(x_1) \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_1(x_2) + g_2(t) \beta[\bar{t}; a_1, a_2]_2(x_1, x_2) \quad (c)$$

$$i \frac{d}{dt} \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_3(x_1, x_2, x_3) = (\omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_3) + E_{a_1} + E_{a_2}) \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_3(x_1, x_2, x_3) + \overline{P}_{a_1, a_2, a_3}^{x_1, x_2, x_3} \sum_{j=1}^2 M_j(x_j) \psi[\bar{t}; b_j, q_{j+1}]_2(x_j, x_3) \quad (d)$$

zur Anfangsbedingung

$$\psi[0; b_1, b_2]_1(x_1) = \psi[0; b_1, q_{j+1}]_2(x_1, x_2) = \psi[0; a_1, a_2]_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (3.8)$$

wobei die Abkürzung $g_j(t)$ bedeutet:

$$g_j(t) := \int d^3x M_j^*(x) \chi(x) e^{-i\omega(x)t} \quad (3.9)$$

dann löst der Ansatz

$$\alpha[\bar{t}; b_1, b_2]_1(x_1) = \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_1(x_1) + \chi(x_1) e^{-i\omega(x_1)\bar{t}} \beta[\bar{t}; b_1, b_2]_0 \quad (a)$$

$$\alpha[\bar{t}; b_j, b_m]_2(x_1, x_2) = (2)^{-\frac{k}{2}} \left\{ \psi[\bar{t}; b_j, b_m]_2(x_1, x_2) + \prod_{i_1, i_2}^{x_1, x_2} \chi(i_k) e^{-i\omega(i_k)\bar{t}} \beta[\bar{t}; b_j, b_m]_1(i_k) \right\} \quad (b)$$

(3.10)

$$\alpha[\bar{t}; a_1, a_2]_3(x_1, x_2, x_3) = (2 \cdot 3)^{-\frac{k}{2}} \left\{ \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_3(x_1, x_2, x_3) + \prod_{i_1, i_2, i_3}^{x_1, x_2, x_3} \chi(i_k) e^{-i\omega(i_k)\bar{t}} \beta[\bar{t}; a_1, a_2]_2(i_k, i_k) \right\} \quad (c)$$

die Ausgangsgleichungen (3.2).

Der Beweis des Satzes ergibt sich einfach durch Einsetzen von (3.10) in (3.2) und Sortieren nach ψ - und β -Amplituden, die in zwei Gleichungssysteme (3.5) und (3.7) unter Berücksichtigung der Definition $g_j(t)$ zusammengefaßt sind. Das Gleichungssystem (3.5) mit der Anfangsbedingung (3.6) beschreibt genau den spontanen Zerfall zweier angeregter Atome, wie ihn ERNST und STEHLE [3] behandelt haben. Die Lösungen sind im Anhang B (B.1-B.6) angegeben. Gleichungssystem (3.7) berücksichtigt den Einfluß des inzidenten Photons auf zwei angeregte Atome, der sich im inhomogenen Teil von (3.7) und der Anfangsbedingung (3.8) ausdrückt.

Die beiden Gleichungssysteme (3.5, 3.7) sind die Nullte und Erste Ordnung eines hierarchisch gegliederten Gleichungssystems für Probleme mit beliebig vielen inzidenten Photonen und zwei angeregten Atomen mit faktorisierender Anfangsamplitude. Grundlage der hierarchischen Struktur ist das Gleichungssystem Nullter Ordnung, das uns den spontanen Zerfall zweier angeregter Atome beschreibt (3.5). Darauf baut sich ein Gleichungssystem für ein inzidentes Photon mit zusätzlichem inhomogenen Term auf, der uns die Art der Verkopplung beider Gleichungssysteme angibt (3.7), in dem die Lösungen

der Nullten Ordnung mit der Überlappungsfunktion $g_j(t)$ verbunden sind usw; d.h. im Gleichungssystem mit n inzidenten Photonen sind die Lösungen des Gleichungssystems mit $n-1$ inzidenten Photonen im inhomogenen Term an eine Überlappungsfunktion $g_j(t)$ gekoppelt (Anhang A).

Die Bedeutung der Funktion $g_j(t)$, die die zentrale Rolle für den Einfluß von inzidenten Photonen auf angeregte Atome spielt, ist nach [18] folgende: $g_j(t)$ verschwindet dann zeitlich, wenn das räumliche inzidente Wellenpaket das Atom A_j nicht überlappt, oder anders: $g_j(t) \neq 0$ ist notwendig und hinreichend für nichttriviale, vom reinen spontanen Zerfall abweichende Vorgänge, wobei das einfallende Photon die "richtige" Frequenz in bezug auf das zu überlappende Atom A_j haben muß und $\overline{g_j(t)} \neq 0$, wobei $\overline{g_j(t)}$ das Zeitmittel von $g_j(t)$ während der Überlappungszeit ist.

§3.2 Separation des Winkelanteils für das Gleichungssystem des inzidenten Photons

Nachdem wir uns mittels des Ansatzes (3.10) einen groben Überblick über die Gesamtlösungen verschafft haben, und uns der Prozeß des spontanen Zerfalls zweier angeregter Atome aus [3] bekannt ist, wollen wir die Lösungen für das Gleichungssystem (3.7) aufsuchen. Die Arbeit wird uns durch die Existenzsätze von [4,5] erleichtert, so daß primär keine mathematischen Probleme mehr auftreten können. Jedoch bedarf der Gebrauch der Exponentialnäherung einer mathematischen und physikalischen Rechtfertigung. Dies wollen wir auf §3.4 verschieben.

Seien $\Psi[\varepsilon; b_1, b_2]_1(x_1)$, $\Psi[\varepsilon; b_3, b_4]_2(x_1, x_2)$, $\Psi[\varepsilon; a_1, a_2]_3(x_1, x_2, x_3)$ die Laplace-transformierten von $\psi[\varepsilon; b_1, b_2]_1(x_1)$, $\psi[\varepsilon; b_3, b_4]_2(x_1, x_2)$, $\psi[\varepsilon; a_1, a_2]_3(x_1, x_2, x_3)$ und $F^1[\varepsilon; a_1, b_2]_1(x_1)$, $F^2[\varepsilon; a_1, a_2]_2(x_1, x_2)$ die Laplacetransformierten von $g_1(t) \beta[\varepsilon; a_1, b_2]_1(x_1)$, $g_2(t) \beta[\varepsilon; a_1, a_2]_2(x_1, x_2)$, dann lauten die Gleichungen (3.7) zur Anfangsbedingung (3.8) im s-Bild:

$$\left\{ s + i(\omega(x_1) + E_{x_1} + E_{b_1}) \right\} \Psi[\varepsilon; b_1, b_2]_1(x_1) = -i \sum_{j=1}^2 \int_{k_1, k_2} d^2 \Omega_j M_j'(x_1) \Psi[\varepsilon; a_1, b_2]_2(x_1, x_2) - i \sum_{j=1}^2 F^j[\varepsilon; a_1, b_2]_1(x_1) \quad (a)$$

$$\left\{ s + i(\omega(x_1) + \omega(x_2) + E_{x_1} + E_{b_1}) \right\} \Psi[\varepsilon; b_1, a_2]_2(x_1, x_2) = -i \int_{k_1, k_2} d^2 \Omega M_1'(x_1) \Psi[\varepsilon; a_1, a_2]_3(x_1, x_2, x_3) - i F^1[\varepsilon; a_1, a_2]_2(x_1, x_2) - i \prod_{k_1, k_2}^{x_1, x_2} M_2(k_1) \Psi[\varepsilon; b_1, b_2]_1(k_2) \quad (b)$$

(3.11)

$$\left\{ s + i(\omega(x_1) + \omega(x_2) + E_{x_1} + E_{b_1}) \right\} \Psi[\varepsilon; a_1, b_2]_2(x_1, x_2) = -i \int_{k_1, k_2} d^2 \Omega M_2'(x_1) \Psi[\varepsilon; a_1, a_2]_3(x_1, x_2, x_3) - i F^2[\varepsilon; a_1, a_2]_2(x_1, x_2) - i \prod_{k_1, k_2}^{x_1, x_2} M_1(k_1) \Psi[\varepsilon; b_1, b_2]_1(k_2) \quad (c)$$

$$\left\{ s + i(\omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_3) + E_{x_1} + E_{x_2}) \right\} \Psi[\varepsilon; a_1, a_2]_3(x_1, x_2, x_3) = -i \prod_{k_1, k_2, k_3}^{x_1, x_2, x_3} M_j(k_i) \Psi[\varepsilon; b_1, b_2]_2(k_1, k_2) \quad (d)$$

Zu Auflösung des Gleichungssystems (3.11) formulieren wir den

Satz 2.

Seien die Funktionen $m_{ij}(k)$ definiert durch

$$m_{ij}(k) = k^2 \sum_{\Omega_{\underline{x}}} d^2 \Omega_{\underline{x}} M_i'(x) M_j(x) \quad , \quad (3.12)$$

wobei $\int_{\Omega_{\underline{x}}} d^2 \Omega_{\underline{x}}$ die Integration über den Winkelanteil $\underline{k}$ bezeichnet, und seien $\Psi[\varepsilon; b_1, b_2]_1(k_1)$, $\Psi[\varepsilon; b_3, b_4]_2(k_1, k_2)$, $\Psi[\varepsilon; a_1, a_2]_3(k_1, k_2, k_3)$ definiert als Lösungen der Gleichungen:

$$\left\{ s + i(\omega(x_1) + E_{b_1} + E_{b_2}) \right\} \Psi^e[s; b_1, b_2]_1(k_1) = -i \sum_{j=1}^2 \int_{\square}^{\omega} dk \, m_{ji}(k) \Psi^{ie}[s; a_j, b_{jm}]_2(k, k_2) \\ - i \sum_{j=1}^2 F_2^j[s; a_j, b_{jm}]_1(k_1) \quad (a)$$

$$\begin{pmatrix} s + i(\omega(x_1) + \omega(x_2) + E_{a_1} + E_{a_2}) & 0 \\ 0 & s + i(\omega(x_1) + \omega(x_2) + E_{a_1} + E_{a_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^{la}[s; b_1, a_2]_2(k, k_2) \\ \Psi^{la}[s; a_1, b_2]_2(k, k_2) \end{pmatrix} = \quad (3.13)$$

$$-i \sum_{i=1}^2 \int_{\square}^{\omega} dk \left(m_{zi}(k) \right) \Psi^{ila}[s; a_i, a_z]_3(k, k_1, k_2) - i \begin{pmatrix} F_{la}^1[s; a_1, a_z]_2(k, k_2) \\ F_{la}^2[s; a_2, a_z]_2(k, k_2) \end{pmatrix} \\ - i \left\{ \begin{pmatrix} \delta_{2m} \\ \delta_{1m} \end{pmatrix} \Psi^e[s; b_i, b_z]_1(k) + \begin{pmatrix} \delta_{2e} \\ \delta_{1e} \end{pmatrix} \Psi^{im}[s; b_i, b_z]_1(k_2) \right\} \quad (b)$$

$$\left\{ s + i(\omega(x_1) + \omega(x_1) + \omega(x_1) + E_{a_1} + E_{a_2}) \right\} \Psi^{ila}[s; a_i, a_z]_3(k, k_2, k_2) = \\ -i \left\{ \Psi^{ie}[s; b_m, a_{mm}]_2(k, k_2) + \Psi^{im}[s; b_e, a_{em}]_2(k, k_2) + \Psi^{la}[s; b_i, a_{im}]_2(k, k_2) \right\}, \quad (c)$$

dann lösen die Ausdrücke

$$\Psi[s; b_1, k_2]_1(x_1) = \sum_{i=1}^2 M_i(x_1) \Psi^i[s; b_i, k_2]_1(k_1) \\ \Psi[s; b_j, a_{jm}]_2(x_1, x_2) = \sum_{i, \ell=1}^2 M_i(x_1) M_{\ell}(x_2) \Psi^{ie}[s; b_j, a_{jm}]_2(k, k_2) \\ \Psi[s; a_i, a_z]_3(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i, \ell, m=1}^2 M_i(x_1) M_{\ell}(x_2) M_m(x_3) \Psi^{ila}[s; a_i, a_z]_3(k, k_2, k_3) \quad (3.14) \\ F_1^j[s; a_j, b_{jm}]_1(x_1) = \sum_{i=1}^2 M_i(x_1) F_1^j[s; a_j, b_{jm}]_1(k) \\ F_2^j[s; a_i, a_z]_2(x_1, x_2) = \sum_{i, \ell=1}^2 M_i(x_1) M_{\ell}(x_2) F_2^j[s; a_i, a_z]_2(k, k_2)$$

die Ausgangsgleichungen (3.11).

Der Beweis erfolgt durch Einsetzen von (3.14) in (3.11) und direktes Ausrechnen der Gleichung (3.13). Dabei müssen wir eine passende Umbenennung der Indizes vornehmen und in der Zweiphotonenamplitude den Faktor M_j so zu einer Summe ergänzen, daß sich auf beiden Seiten gleiche Terme herausheben. Deshalb tritt in (3.13b) ein δ -Faktor auf.

Neben dem Ansatz (3.10) erweist sich auch der Ansatz (3.14) als ein weiterer entscheidender Schritt zur Lösung. Er gestattet es uns, auf verblüffend einfache Weise den Winkelanteil aus den Amplituden abzuseparieren, so daß wir "nur" noch den radialen Anteil der Gleichungen (3.11) zu lösen brauchen. Die Faktorisierung der Winkelanteile der Schrödingeramplituden scheint ein sehr allgemeiner, aber wesentlicher Zug der Theorie für ruhende Atome zu sein. Dies hat insbesondere zur Folge, daß die Emissionsrichtung der Photonen unabhängig ist von irgendwelchen dynamischen Prozessen. Sie wird allein bestimmt durch die Struktur und Lage der Atome, die das atomare Übergangselement $M^{\eta}(\underline{x}^i, \underline{q}, \underline{a}'_i, \underline{x})$ (2.21) ausdrückt. Auch aus anderen Weisskopf-Wigner Theorien liegen positive Erfahrungen vor [3,8,19].

§3.3 Auflösung des Radialgleichungssystems

Zum Auflösen des Gleichungssystems (3.13) setzen wir (3.13c) in (3.13b) ein und erhalten:

$$\left(\begin{array}{l} s + i(\omega(k_1) + \omega(k_2) + E_{a_1} + E_{a_2}) + \int_0^\infty dk \frac{m_{11}(k)}{s + i(\omega(k) + \omega(k_1) + \omega(k_2) + E_{a_1} + E_{a_2})} \\ \int_0^\infty dk \frac{m_{21}(k)}{s + i(\omega(k) + \omega(k_1) + \omega(k_2) + E_{a_1} + E_{a_2})} \\ s + i(\omega(k_1) + \omega(k_2) + E_{b_1} + E_{b_2}) + \int_0^\infty dk \frac{m_{12}(k)}{s + i(\omega(k) + \omega(k_1) + \omega(k_2) + E_{b_1} + E_{b_2})} \\ \int_0^\infty dk \frac{m_{22}(k)}{s + i(\omega(k) + \omega(k_1) + \omega(k_2) + E_{b_1} + E_{b_2})} \end{array} \right) \times$$

$$\times \left(\begin{array}{l} \Psi^{\text{em}}[\bar{s}; b_1, b_2]_z(k, k_2) \\ \Psi^{\text{em}}[\bar{s}; a_1, a_2]_z(k, k_2) \end{array} \right) =$$

$$-i \left(\begin{array}{l} F_{em}^1[\bar{s}; a_1, a_2]_z(k, k_2) \\ F_{em}^2[\bar{s}; a_1, a_2]_z(k, k_2) \end{array} \right) - i \left\{ \left(\begin{array}{l} \delta_{2m} \\ \delta_{4m} \end{array} \right) \Psi^e[\bar{s}; b_1, b_2]_z(k) + \left(\begin{array}{l} \delta_{2e} \\ \delta_{4e} \end{array} \right) \Psi^m[\bar{s}; b_1, b_2]_z(k) \right\} \quad (3.15)$$

$$- \sum_{i=1}^2 \int_0^\infty dk \frac{1}{s + i(\omega(k) + \omega(k_1) + \omega(k_2) + E_{a_1} + E_{a_2})} \left(\begin{array}{l} m_{1i}(k) \\ m_{2i}(k) \end{array} \right) \left\{ \Psi^e[\bar{s}; b_{1i}, b_{2i}]_z(k, k_1) + \Psi^m[\bar{s}; b_{1i}, b_{2i}]_z(k, k_2) \right\}.$$

Gleichung (3.15) ist eine inhomogene Integralgleichung für $\Psi^{\text{em}}[\bar{s}; b_j, a_j]_z(k, k_2)$, die sich mit Hilfe der "Exponentialnäherung" (E.N) als Sekundärnäherung in eine rein algebraische Gleichung umformen läßt (§3.4). Die Ursache für das Auftreten von Integralgleichungen für Probleme mit einer Photonenzahl $n \geq 2$ liegt daran, daß Photonen als Bosonen einem Symmetrisierungsprozeß unterworfen sind (3.11c,d, 3.13b,c). In der E.N erhalten wir für (3.15) als Lösung:

$$\begin{pmatrix} \Psi^{h_{11}}[s; b_1, q_1]_z(k, k_1) \\ \Psi^{h_{21}}[s; a_1, b_1]_z(k, k_1) \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} B^{20}[s+i(\omega(k_1)+\omega(k_1)); b_1, a_1]_0, & A^{11}[s+i(\omega(k_1)+\omega(k_1)); b_1, a_1]_0 \\ A^{11}[s+i(\omega(k_1)+\omega(k_1)); a_1, b_1]_0, & B^{20}[s+i(\omega(k_1)+\omega(k_1)); a_1, b_1]_0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \begin{pmatrix} F_{11}^1[s; a_1, q_1]_z(k, k_1) \\ F_{21}^2[s; a_1, q_1]_z(k, k_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{21} \\ \delta_{11} \end{pmatrix} \Psi^e[s; b_1, b_1]_z(k) + \begin{pmatrix} \delta_{2e} \\ \delta_{1e} \end{pmatrix} \Psi^{11}[s; b_1, b_1]_z(k) \right\} \quad (3.16)$$

mit den Abkürzungen:

$$B^{20}[s; b_j, q_{j+1}]_0 = \frac{s+i(E_{q_{j+1}}+E_{q_j})+\Gamma}{(s+i(E_{q_j}+E_{q_{j+1}})+\Gamma)(s+i(E_{q_j}+E_{q_{j+1}})+\Gamma)-\Gamma_{j+1}(s)\Gamma_j(s)} = \quad (a)$$

$$= \frac{1}{s+i(E_{q_j}+E_{q_{j+1}})+\Gamma} \left\{ 1 - \frac{\Gamma_{j+1}(s)}{s+i(E_{q_j}+E_{q_{j+1}})+\Gamma} \frac{1}{\Gamma_{j+1}(s)} \frac{1}{s+i(E_{q_j}+E_{q_{j+1}})+\Gamma} \right\}^{-1} \quad (3.17)$$

$$A^{11}[s; b_j, q_{j+1}]_0 = \frac{-\Gamma_{j+1}(s)}{(s+i(E_{q_j}+E_{q_{j+1}})+\Gamma)(s+i(E_{q_j}+E_{q_{j+1}})+\Gamma)-\Gamma_{j+1}(s)\Gamma_j(s)} = \quad (b)$$

$$= \frac{1}{s+i(E_{q_j}+E_{q_{j+1}})+\Gamma} \frac{\Gamma_{j+1}(s)}{s+i(E_{q_j}+E_{q_{j+1}})+\Gamma} \left\{ 1 - \frac{\Gamma_{j+1}(s)}{s+i(E_{q_j}+E_{q_{j+1}})+\Gamma} \frac{1}{\Gamma_{j+1}(s)} \frac{1}{s+i(E_{q_j}+E_{q_{j+1}})+\Gamma} \right\}^{-1}$$

und

$$\Gamma_{j+1}(s) = \int_0^\infty dk \frac{m_{j+1}(k)}{s+i(\omega(k)+\omega_{q_j}-E_{q_{j+1}})} \quad (3.18)$$

Setzen wir (3.16) in (3.13a) ein, so erhalten wir:

$$\left\{ S + i(\omega(k_1) + E_{b_1} + E_{b_2}) + \sum_{j=1}^2 \int_0^{\infty} dk \left(m_{j,i}(k) \tilde{B}^{SP}[\tilde{s} + i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); q_i, b_{in}]_0 + m_{j,i+1}(k) \tilde{A}^{H}[\tilde{s} + i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); a_{i+1}, b_i]_0 \right) \right\} \\ \Psi^L[\tilde{s}; b_i, b_j]_q(k) =$$

(3.19)

$$- i \sum_{j=1}^2 F_{\tilde{e}}^j[\tilde{s}; q_j, b_{jm}]_1(k) - \sum_{j=1}^2 \int_0^{\infty} dk \left\{ m_{j,i}(k) \tilde{B}^{SP}[\tilde{s} + i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); q_i, b_{in}]_0 F_{\tilde{e}}^{j+1}[\tilde{s}; a_i, b_i]_2(k, k_1) + \right. \\ \left. m_{j,i}(k) \tilde{A}^{H}[\tilde{s} + i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); q_j, b_{jm}]_0 F_{\tilde{e}}^j[\tilde{s}; a_i, b_i]_2(k, k_1) + (m_{2,i}(k) \tilde{B}^{SP}[\tilde{s} + i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); a_2, b_{in}]_0 + \right. \\ \left. m_{2,i+1}(k) \tilde{A}^{H}[\tilde{s} + i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); a_{i+1}, b_i]_0) \right\} \Psi^i[\tilde{s}; b_i, b_j]_1(k)$$

Wiederum lassen sich alle Integrale auf der rechten Seite in (3.19) mit Hilfe der E.N. wegdiskutieren (§3.4). Den ersten Term im Integral auf der linken Seite von (3.19) berechnen wir nach der Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{Q_0 k + Q_1}{(k - a_1)(k - a_2)} = \frac{Q_0 a_1 + Q_1}{a_1 - a_2} \ln(k - a_1) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{Q_0 a_2 + Q_1}{a_1 - a_2} \ln(k - a_2) \Big|_{-\infty}^{\infty} = i\pi Q_0 \quad ; \quad (3.20)$$

alle anderen Integrale fallen in der E.N. heraus, und wir erhalten für die Einphotonenamplitude als Lösung

$$\Psi^e[\tilde{s}; b_i, b_j]_1(k) = -i \frac{\sum_{j=1}^2 F_{\tilde{e}}^j[\tilde{s}; q_j, b_{jm}]_1(k)}{S + i(\omega(k_1) + E_{b_1} + E_{b_2}) + 2\Gamma} = -i \tilde{B}^{SP}[\tilde{s} + i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); b_i, b_j]_0 \sum_{j=1}^2 F_{\tilde{e}}^j[\tilde{s}; q_j, b_{jm}]_1(k) \quad (3.21)$$

Die Zweiphotonenamplitude (3.16) lautet:

$$\Psi^{\text{lin}}[\tilde{s}; b_j, a_i]_{j,i}(k, k_1) = -i \tilde{B}^{SP}[\tilde{s} + i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); b_j, a_i]_0 F_{\text{lin}}^i[\tilde{s}; a_i, a_i]_2(k, k_1) - i \tilde{A}^{H}[\tilde{s} + i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); b_j, a_i]_0 \times \\ (3.22) \\ = F_{\text{lin}}^{iH}[\tilde{s}; a_i, a_i]_2(k, k_1) - i \tilde{B}_{\text{lin}}[\tilde{s} + i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); b_j, a_i]_1 \sum_{j=1}^2 F_{\tilde{e}}^j[\tilde{s}; q_j, b_{jm}]_1(k) - i \tilde{B}_{\tilde{e}}[\tilde{s} + i\omega(k_2); b_j, a_i]_1(k) \times \\ \times \sum_{j=1}^2 F_{\text{lin}}^j[\tilde{s}; a_j, b_{jm}]_1(k)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mu\nu}[\vec{s}; q_1, q_2](k) &= -i \delta_{\mu\nu} \mathcal{B}_{\mu\nu}^{\text{sp}}[\vec{s}; q_1, q_2](k) - i \delta_{\mu\nu} A_{\mu\nu}^*[\vec{s}; q_1, q_2](k) \\ &= -i \left(\delta_{\mu\nu} \mathcal{B}_{\mu\nu}^{\text{sp}}[\vec{s}; i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); q_1, q_2]_0 - \delta_{\mu\nu} A_{\mu\nu}^*[\vec{s}; i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); q_1, q_2]_0 \right) \mathcal{B}^{\text{sp}}[\vec{s}; k_1, k_2]_0; \end{aligned} \quad (3.23)$$

und die Dreiphotonenamplitude:

$$\begin{aligned} \Psi^{\text{in}}[\vec{s}; a_1, a_2]_3(k_1, k_2, k_3) &= -i \sum_{j=1,2}^3 \left\{ \mathcal{B}_{\mu\nu}^j[\vec{s}; i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); a_1, a_2]_j(k_1) F_{\ell}^j[\vec{s}; a_1, a_2]_j(k_2, k_3) + \mathcal{B}_{\ell}^j[\vec{s}; i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); a_1, a_2]_j(k_1) \times \right. \\ &\quad \left. \times F_{\mu\nu}^j[\vec{s}; a_1, a_2]_j(k_2, k_3) + \mathcal{B}_{\ell}^j[\vec{s}; i(\omega(k_2) + \omega(k_3)); a_1, a_2]_j(k_1) F_{\mu\nu}^j[\vec{s}; a_1, a_2]_j(k_2, k_3) \right\} \\ &\quad - i \left(\mathcal{B}_{\mu\nu}^{\text{sp}}[\vec{s}; i\omega(k_1); a_1, a_2]_2(k_1, k_2) + \mathcal{B}_{\mu\nu}^{\text{sp}}[\vec{s}; i\omega(k_2); a_1, a_2]_2(k_2, k_3) \right) \sum_{j=1}^2 F_{\ell}^j[\vec{s}; q_1, q_2]_j(k_1) \\ &\quad - i \left(\mathcal{B}_{\ell}^{\text{in}}[\vec{s}; i\omega(k_2); a_1, a_2]_1(k_1, k_2) + \mathcal{B}_{\ell}^{\text{in}}[\vec{s}; i\omega(k_3); a_1, a_2]_1(k_2, k_3) \right) \sum_{j=1}^2 F_{\ell}^j[\vec{s}; q_1, q_2]_j(k_1) \\ &\quad - i \left(\mathcal{B}_{\ell}^{\text{in}}[\vec{s}; i\omega(k_3); a_1, a_2]_1(k_1, k_2) + \mathcal{B}_{\ell}^{\text{in}}[\vec{s}; i\omega(k_1); a_1, a_2]_1(k_2, k_3) \right) \sum_{j=1}^2 F_{\ell}^j[\vec{s}; q_1, q_2]_j(k_2) \end{aligned} \quad (3.24)$$

mit

$$\mathcal{B}_{\mu\nu}^j[\vec{s}; a_1, a_2]_j(k) = -i \frac{\delta_{\mu\nu}}{s + i(\omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(k_3))} \mathcal{B}_{\mu\nu}^{\text{sp}}[\vec{s}; q_1, q_2]_0 - i \frac{\delta_{\mu\nu}}{s + i(\omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(k_3))} A_{\mu\nu}^*[\vec{s}; q_1, q_2]_0 \quad (3.25)$$

$$\mathcal{B}_{\ell}^{\text{in}}[\vec{s}; a_1, a_2]_1(k_1, k_2) = -i \frac{1}{s + i(\omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(k_3))} \left(\mathcal{B}_{\ell}^{\text{sp}}[\vec{s}; k_1, a_1, a_2]_1(k_1) + \mathcal{B}_{\ell}^{\text{sp}}[\vec{s}; k_2, a_1, a_2]_1(k_2) \right) \quad (3.26)$$

Setzen wir die Lösungen (3.21), (3.22), (3.24) in die winkelabhängigen Ausdrücke (3.14) ein, so lösen folgende Ausdrücke

mein Ausgangsgleichungssystem (3.11).

$$\Psi[s; b_1, b_2]_1(k_1) = -i B^{Sp}[s+i\omega(k_1); b_1, b_2]_0 \sum_{j=1}^2 F^j[s; a_j, b_{j+1}]_1(k_1) \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \Psi[s; b_j, q_{j+1}]_1(k_1, k_2) &= -i B^{Sp}[s+i(\omega(k_1)+\omega(k_2)); b_j, q_{j+1}]_0 F^j[s; a_j, b_{j+1}]_1(k_1, k_2) \\ &\quad - i A^{Th}[s+i(\omega(k_1)+\omega(k_2)); b_j, q_{j+1}]_0 F^{j+1}[s; a_j, b_{j+1}]_1(k_1, k_2) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$-i \overline{P}_{k_1 k_2}^{k_1 k_2} B[s+i\omega(k_1); b_j, q_{j+1}]_1(k_2) \sum_{j=1}^2 F^j[s; a_j, b_{j+1}]_1(k_1)$$

$$\Psi[s; a_1, a_2]_2(k_1, k_2, k_3) = -i \overline{P}_{k_1 k_2 k_3}^{k_1 k_2 k_3} B[s+i\omega(k_1); a_1, a_2]_1(k_2, k_3) \sum_{j=1}^2 F^j[s; a_j, b_{j+1}]_1(k_1) \quad (3.29)$$

$$-i \overline{P}_{k_1 k_2 k_3}^{k_1 k_2 k_3} \sum_{j=1}^2 B^j[s+i(\omega(k_1)+\omega(k_2)); a_1, a_2]_1(k_3) F^j[s; a_j, b_{j+1}]_1(k_1, k_2)$$

mit

$$B[s; b_j, q_{j+1}]_1(k_1) = -i \left(B^{Sp}[s+i\omega(k_1); b_j, q_{j+1}]_0 M_{j+1}(k_1) + A^{Th}[s+i\omega(k_1); b_j, q_{j+1}]_0 M_j(k_1) \right) B^{Sp}[s; b_1, b_2]_0 \quad (3.30)$$

$$B^j[s; a_j, b_{j+1}]_1(k_1) = -i \left(\frac{H_j(k_1)}{s+i(\omega(k_1)+E_{a_j}-E_{b_{j+1}})} B^{Sp}[s; b_j, q_{j+1}]_0 + \frac{M_{j+1}(k_1)}{s+i(\omega(k_1)+E_{a_j}-E_{b_{j+1}})} A^{Th}[s; a_j, b_{j+1}]_0 \right) \quad (3.31)$$

$$B[s; a_1, a_2]_2(k_1, k_2) = -i \overline{P}_{k_1 k_2}^{k_1 k_2} \sum_{j=1}^2 \frac{M_j(k_2)}{s+i(\omega(k_1)+\omega(k_2)+E_{a_1}-E_{a_2})} B[s; b_j, q_{j+1}]_1(k_2) \quad (3.32)$$

Die Struktur der Lösungen (3.27-3.29) zeigt, daß sie sich aus sog. spontanen- und resonanten Amplituden komponieren lassen. Eine genaue Analyse dieser Ergebnisse erfolgt in §4. Die Rücktransformationen der Lösungen ins t-Bild sind wegen der länglichen Formeln im Anhang B angegeben.

§3.4 Über den Gebrauch der Exponentialnäherung zur Lösung der radialen Gleichungen

Im vorigen Kapitel ist es uns mit Hilfe der E.N gelungen, die Integralgleichungen auf rein algebraische Gleichungen zurückzuführen. Hier soll nun dieses Verfahren, das dies ermöglicht, begründet werden.

Das Auftreten von Integralgleichungen bei einer Photonen-
zahl $n > 1$ ist ein allgemeiner Zug aller Weisskopf-Wigner
Theorien, dessen Ursache der Symmetrisierungsprozeß für
Bosonen ist. Die Idee der E.N geht in dieser Form auf ERNST
und STEHLE [3] zurück und ist in [8] auf ihren Gültigkeits- und
Anwendungsbereich ausführlich diskutiert worden. Ihr großer
Vorteil liegt darin, daß sie als globale Näherung die Uni-
taritätsbedingung nicht verletzt und ein einfaches Rechen-
verfahren bietet, ohne die physikalische Substanz der Theorie
zu zerstören oder grob zu verfälschen, da sie die Haupteffekte
berücksichtigt und nur kleine Korrekturterme vernachlässigt
werden (Anhang C und D). So haben schon frühere Beispiele
[3, 18, 19] gezeigt, daß die Anwendung der E.N die Lösungen ex-
trem vereinfacht, wenn nicht gar erst möglich macht. Deshalb
haben wir begründete Hoffnung, die E.N als gute Näherung für
alle quantenoptischen Probleme anzusehen.

Mit ihrer Hilfe lassen sich die Integrale in (3.15 und 3.19)
folgendermaßen bestimmen. Gegeben sei ein Ausdruck der Form

$$3 + \int_0^{\infty} dk \frac{m_{ij}(k)}{s_{+1}(k-\Delta)} \quad \Delta = E_0 - E_2 \quad i, j = 1, 2 \quad (3.33)$$

Für große $|s|$ fällt das Integral wie $\sim |s|^{-1}$ ab, so daß es im
Vergleich zu s nur einen Beitrag bei $s=0$ liefert. Nach dem

Energieerhaltungssatz erwarten wir, daß die Radialfunktionen in (3.11) nur in der Umgebung $k=\Delta$ von Null verschieden sind. Da $m_{ij}(k)$ für dicht beieinanderliegende Atome, d.h. für Abstände zwischen den Atomen von $|x_1 - x_2| \ll \lambda$ mit $\lambda = \frac{2\pi}{\Delta}$, bei $k = \Delta$ eine schwach veränderliche Funktion ist [6,7], können wir $m_{ij}(k)$ an dieser Stelle als Konstante betrachten und somit vor das Integral ziehen, wobei wir die untere Integrationsgrenze nach $-\infty$ ausdehnen müssen, um Divergenzen zu vermeiden. In Formeln ausgedrückt bedeutet das:

$$s + \int_0^{\infty} dk \frac{m_{ij}(k)}{s + i(k-\Delta)} \xrightarrow{E.N} s + m_{ij}(\Delta) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{i(k-\Delta) + \varepsilon} = s + \Gamma_{ij}, \quad \Gamma_{ij} = \pi m_{ij}(\Delta). \quad (3.34)$$

Für den Fall der spontanen Emission eines angeregten Atoms führt diese Näherung auf das exponentielle Zerfallsgesetz von WEISSKOPF und WIGNER [2]. Die Erweiterung der Integrationsgrenze nach $-\infty$ ist hier formal durchgeführt und hat nur den Sinn, das obige Integral konvergent zu machen. Wir sind uns bewußt, daß durch den scheinbar harmlosen Eingriff in (3.34) unser Hamiltonoperator H nach unten nicht mehr beschränkt ist, d.h. H hat die ganze reelle Zahlenachse als Spektrum. Dies ist nicht ein spezieller Zug unserer Sekundärnäherung, sondern eine allgemeine Erscheinung, die allen exponentiellen Zerfallsgesetzen zugrunde liegt [20]. Für große Abstände zwischen den Atomen ist $m_{ij}(k)$ eine stark oszillierende Funktion und das Integral verschwindet. Physikalisch bedeutet das, daß beide Atome statistisch unabhängig voneinander zerfallen. Diesen trivialen Fall wollen wir ausschließen.

Eine Erweiterung der E.N auf die Integrale allein ist zwar problematisch, soll aber hier angenommen werden, weil

sie praktisches Rechnen ermöglicht. Erst so können wir in (3.15) die Integralgleichung durch ihren inhomogenen Teil lösen. Für $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma$ und an der Stelle $s = -i(\omega(x) + \omega(x_2) + E_{q_2} + E_{q_{n-1}})$ ist die Lösung (3.16) Ergebnis der E.N. Um dies zu sehen, müssen wir einen bekannten Satz aus der Funktionentheorie zu Hilfe nehmen. $J(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk Q(k)$; $Q(k)$ rational; Nenner ohne reelle Nullstelle; Grad des Nenners wenigstens um zwei größer als derjenige des Zählers. Wenn alle Pole in der oberen Halbebene (O.H) liegen, können wir den Halbkreis in der unteren Halbebene schließen und es gilt $J(k) = 0$

Wenden wir die E.N auf die Integralgleichung (3.15) an, so können wir $\begin{pmatrix} m_{1i}(\Delta) \\ m_{2i}(\Delta) \end{pmatrix}$ vor das Integral ziehen. Damit der Integrand sich wie $(\omega(x))^{-2}$ verhält, müssen wir von der Amplitude $\Psi_{[s; a_j, q_{j+1}]_2}(k, k)$ fordern, daß sie sich mindestens wie $(\omega(x))^{-1}$ verhält. Die Lösung (3.16) zeigt, daß tatsächlich diese Forderung erfüllt ist, da die Matrix nach (3.17) wie $(\omega(x))^{-1}$ abfällt; $F_{a_n}^i [a; a, q]_2(k, k) \sim (\omega(x))^{-1}$ (B.6b); $\Psi_{[s; k_0, k]_1}(x) \sim (\omega(x))^{-1}$ (3.21, B.4b).

Folgende Betrachtung zeigt, daß alle Pole in der O.H liegen. Nach (B.6b) gilt dies für F_{1m}^j . Von Ψ^i fordern wir, daß seine Pole in der O.H liegen, was zumindest mit der Lösung (3.21) selbstkonsistent ist. Für die Matrix in (3.16) müssen wir die Polstellen in der Variablen $\omega(x_1)$ bestimmen, d.h. nach (3.17) soll

$$(s + i(\omega(x) + E_{q_2} + E_{q_{n-1}}) + \Gamma)^2 - \int_0^{\infty} dk \frac{m_{12}(k)}{s + i(\omega(x) + \omega(x_2) + E_{q_2} + E_{q_{n-1}})} - \int_0^{\infty} dk' \frac{m_{21}(k')}{s + i(\omega(x) + \omega(x_2) + E_{q_2} + E_{q_{n-1}})} = 0 \quad (3.35)$$

sein.

alle Terme die Voraussetzungen des obigen Satzes, was wir bereits für die Zweiphotonenamplitude diskutiert haben. Für $\Psi^i[k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6]$ fordern wir ein Verhalten $\sim (\omega(k))^{-1}$ und alle Pole in der O.H. Dies ist uns durch den Ansatz (3.21) garantiert, so daß alle Integralterme auf der rechten Seite verschwinden.

Der Gebrauch der E.N für die Integralgleichung war zumindest selbstkonsistent, und wie wir sehen, hat diese Näherung uns eine Methode in die Hand gegeben, die das praktische Rechnen extrem vereinfacht. Welchen Preis wir dafür zahlen müssen, d.h. welche physikalischen Effekte uns verloren gehen, wollen wir im Anhang C am Beispiel zweier angeregter Atome studieren.

§4. Interpretation der Lösungen

Das tragende physikalische Prinzip der Wechselwirkung zwischen drei Photonen und zwei Atomen sind die beiden Grundprozesse der spontanen Emission und der Absorption. Aus diesen Kombinationen setzen sich unsere Lösungen (3.27-3.29) zusammen. Das liegt an den hierarchisch gegliederten Gleichungssystemen (3.5) und (3.7), da sich der Prozeß mit einem inzidentem Photon aufbaut aus den Lösungen des spontanen Zerfalls zweier angeregter Atome. In §4.1 wollen wir die notwendigen physikalischen Anschauungen an Hand des Prozesses Nullter Ordnung herausarbeiten, um sie für den Fall des inzidenten Photons in §4.2 anzuwenden.

§4.1 Der Prozeß Nullter Ordnung: zwei angeregte Atome

Der spontane Zerfall zweier angeregter Atome läßt sich auf den Elementarprozeß zweier Atome und ein Photon zurückführen. Dies zeigt die Struktur der Matrix (3.16) und der Formel (C.4), die nur die spontane- und resonante Amplitude des Elementarprozesses enthält, deren Lösung uns aus (3.17a,b) bekannt ist:

$$\begin{aligned}
 \hat{B}^{sp}(s; j_1, j_{21}) &= \frac{s + i(E_{j_{21}} + E_{j_1}) + \Gamma}{(s + i(E_{j_1} + E_{j_{21}}) + \Gamma) (s + i(E_{j_{21}} + E_{j_1}) + \Gamma) - \Gamma_{j_{21}}(s) \Gamma_{j_1}(s)} \quad (4.1) \\
 &= \frac{1}{s + i(E_{j_1} + E_{j_{21}}) + \Gamma} \left\{ 1 - \Gamma_{j_{21}}(s) \frac{1}{s + i(E_{j_1} + E_{j_{21}}) + \Gamma} \Gamma_{j_1}(s) \frac{1}{s + i(E_{j_1} + E_{j_{21}}) + \Gamma} \right\}^{-1} \\
 &= \frac{1}{s + i(E_{j_1} + E_{j_{21}}) + \Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\Gamma_{j_{21}}(s) \frac{1}{s + i(E_{j_1} + E_{j_{21}}) + \Gamma} \Gamma_{j_1}(s) \frac{1}{s + i(E_{j_1} + E_{j_{21}}) + \Gamma} \right)^n
 \end{aligned}$$

Für $\nu=0$, der Nullten Näherung, haben wir den spontanen Zerfall zweier Atome, von denen A_j angeregt und A_{j+1} im Grundzustand ist. Dabei zerfällt A_j so, als ob für es A_{j+1} nicht existiere. Wir nennen deshalb (4.1) die spontane Amplitude. Für $\nu=1$, der Ersten Näherung, lesen wir (4.1) von hinten nach vorne. Das angeregte Atom A_j emittiert sein Photon α spontan, dieses Photon überlappt Atom A_{j+1} und wird von ihm absorbiert. Ein solcher Emissions-Absorptionsprozeß wird beschrieben nach [16] durch den Ausdruck

$$\frac{-i}{s+i(E_j+E_{j+1})+\Gamma} \int d^4x M_{jm}^{\nu}(x) \frac{-i M_{jm}^{\nu}(x)}{s+i(\omega(x)+E_j-E_{j+1})} \stackrel{(3.9)}{=} -\frac{1}{s+i(E_j+E_{j+1})+\Gamma} \Gamma_{jm}(s) = A^*[\vec{s}, \vec{q}, \vec{q}_{j+1}]_0, \quad (4.2)$$

wobei an die Stelle des inzidenten Photons $\gamma(x)$ in der Überlappungsfunktion $g_j(t)$ (3.9) das vom Atom emittierte Photon tritt $\left(i \frac{M_{jm}^{\nu}(x)}{s+i(\omega(x)+E_j-E_{j+1})} \right)$. Im zweiten Teil der Formel (4.1) emittiert A_{j+1} dieses Photon wieder. Dann überlappt es A_j und wird von ihm nach demselben Mechanismus absorbiert $\left(-\frac{1}{s+i(E_j+E_{j+1})+\Gamma} \Gamma_{jm}(s) \right)$. Da das Photon zwischen den beiden Atomen A_j und A_{j+1} genau einmal hin- und hergelaufen ist, nennen wir einen solchen Prozeß nach [16] "Photonenlaufzeiteffekt" zwischen den Atomen A_j und A_{j+1} ($A_j \xrightarrow{\gamma} A_{j+1} \xrightarrow{\gamma} A_j$). Jede höhere Näherung wiederholt diese "Schleife".

Daneben haben wir noch als Lösung (3.17b)

$$A^*[\vec{s}, \vec{q}, \vec{q}_{j+1}]_0 = -\frac{\Gamma_{jm}(s)}{(s+i(E_j+E_{j+1})+\Gamma)(s+i(E_j+E_{j+1})-\Gamma) - \Gamma_{jm}(s)\Gamma_{jm}(s)} \quad (4.3)$$

$$= -\frac{1}{s+i(E_j+E_{j+1})+\Gamma} \Gamma_{jm}(s) \frac{1}{s+i(E_j+E_{j+1})+\Gamma} \left\{ 1 - \Gamma_{jm}(s) \frac{1}{s+i(E_j+E_{j+1})+\Gamma} \Gamma_{jm}(s) \frac{1}{s+i(E_j+E_{j+1})+\Gamma} \right\}^{-1}$$

$$= -\frac{1}{s+i(E_j+E_{j+1})+\Gamma} \Gamma_{jm}(s) \frac{1}{s+i(E_j+E_{j+1})+\Gamma} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\Gamma_{jm}(s) \frac{1}{s+i(E_j+E_{j+1})+\Gamma} \Gamma_{jm}(s) \frac{1}{s+i(E_j+E_{j+1})+\Gamma} \right)^{\nu}$$

Die Summe ist uns aus (4.1) als Laufzeiteffekt des Photons zwischen den Atomen A_{j+1} und A_j bekannt. Wir nennen (4.3) die resonante Amplitude, weil für $\nu=0$ das angeregte Atom A_{j+1} sein Photon emittiert, dies überlappt dann A_j und wird von ihm nach (4.2) absorbiert ($A_{j+1} \xrightarrow{\nu} A_j$). Durch die spontane und resonante Amplitude (4.1, 4.3) werden die beiden möglichen Ausgangssituationen für die Amplitude $B_{j,j+1}$ (A_j angeregt, A_{j+1} im Grundzustand) berücksichtigt, je nachdem ob A_j oder A_{j+1} angeregt war.

So ist es verständlich, daß zwei Atome, von denen eines angeregt ist, statistisch nicht unabhängig zerfallen können, da die Atome über die Laufzeiteffekte voneinander "wissen".

Für praktische Rechnungen sind wir auf die E.N auch in den Nichtdiagonalelementen der Matrix (3.15) angewiesen (§3.4). Setzen wir in (4.1) und (4.3) $r_{ij}(s) \rightarrow \bar{r}_{ij}$, bilden die Laplacetransformierten und führen die Summe aus, so erhalten wir das bekannte exponentielle Zerfallsgesetz für zwei Atome, von denen eines angeregt ist (B.2, B.3). Wir sehen, daß sich die Laufzeiteffekte in der E.N auf den zusätzlichen Term $|r_{ij}|$ reduzieren. Gehen wir nach diesen Vorbetrachtungen zur Diskussion der Wechselwirkung zwischen zwei Photonen und zwei Atome über.

In der Nullphotonenamplitude sind für $t=0$ beide Atome angeregt und beginnen statistisch voneinander unabhängig spontan nach dem Exponentialgesetz zu zerfallen (B.1). Die Einphotonenamplitude setzt sich aus zwei additiven Anteilen zusammen, einmal der spontanen, zum anderen aus der resonanten Amplitude (3.30).

a) Der Ausdruck für die spontane Amplitude lautet nach (3.17a) und (3.30):

$$B^{Sp}[\zeta_j, b_j, g_{j+1}, I_j](k) = - \frac{i}{\epsilon + i(\omega(k) + \epsilon_{g_j} - \epsilon_{g_{j+1}})\tau} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\Gamma_{j+1}^{(\nu)}(s + i\omega(k)) \frac{1}{s + i(\omega(k) + \epsilon_{g_j} - \epsilon_{g_{j+1}})\tau} \Gamma_{j+1}^{(\nu)}(s + i\omega(k)) \frac{1}{s + i(\omega(k) + \epsilon_{g_j} - \epsilon_{g_{j+1}})\tau} \right)^{\nu} \times M_{j+1}(k) B^{Sp}[\zeta_j, b_j, g_{j+1}, J_0] \quad (4.4)$$

Für $\nu=0$ beschreibt uns (4.4) den Fall zweier angeregter Atome, von denen Atom A_{j+1} unter Emission eines Photons x , spontan in den Grundzustand übergeht, so als ob Atom A_j nicht existiere. Wir nennen deshalb a) spontane Amplitude. Für $\nu=1$ zerfällt A_{j+1} wie oben zunächst unabhängig von A_j spontan mit einem Photon x , der Winkelverteilung von Atom A_{j+1} . Dann läuft analog (4.1) das Photon x zwischen A_j und A_{j+1} hin und her ($A_j \xrightarrow{x} A_{j+1} \xrightarrow{x} A_j$), und zwar für jedes ν jeweils eine neue Schleife. Die Verkopplung des von A_{j+1} emittierten Photons an A_j geschieht durch die Bedingung, daß wir nach derjenigen Amplitude fragen, in der gleichzeitig A_j angeregt und ein Photon mit der Winkelverteilung des Atoms A_{j+1} vorhanden ist. Dies ist abhängig davon, ob das von A_j emittierte Photon von A_{j+1} absorbiert wurde oder schon wieder zu A_j zurückgekehrt ist (siehe Laufzeiteffekte im Beispiel (4.1)). Die Verkopplung über die Laufzeiteffekte drückt sich in (B.4) dadurch aus, daß neben dem reinen spontanen Zerfall eines Atoms noch der Term $|U_n|$ hinzukommt. In der exakten Theorie, d.h. unter Berücksichtigung der Integralgleichung, werden die beiden Photonen zusätzlich in allen möglichen Kombinationen zwischen den beiden Atomen noch ausgetauscht, unter der Bedingung, daß " A_j angeregt, A_{j+1} im Grundzustand und ein Photon vorhanden ist".

b) Für die resonante Amplitude gilt nach (3.17b) und (3.30):

$$A^{\nu}[b_j, b_{j+1}, \dots]_1(k_1) = - \frac{1}{\delta i (\omega(k_1) - E_{b_j} + E_{b_{j+1}}) + \eta} \Gamma_{j+1}(s; i\omega(k_1)) \frac{-i}{\delta i (\omega(k_1) - E_{b_j} + E_{b_{j+1}}) + \eta} \quad (4.5)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\Gamma_{j+1}(s; i\omega(k_1)) \frac{1}{\delta i (\omega(k_1) - E_{b_j} + E_{b_{j+1}}) + \eta} \Gamma_{j+1}(s; i\omega(k_1)) \frac{1}{\delta i (\omega(k_1) - E_{b_j} + E_{b_{j+1}}) + \eta} \right)^{\nu} M_j(k_1) B^{\nu}[b_j, b_{j+1}, \dots]_0$$

Die Interpretation der resonanten Amplitude ist analog geführt wie für (4.4). Für $\nu=0$ zerfällt Atom A_j spontan, während das von A_{j+1} emittierte Photon von A_j absorbiert wird ($A_{j+1} \xrightarrow{\gamma} A_j$). Für $\nu \geq 1$ ist die Summe zwischen diesem Prozeß dazwischengeschaltet, die uns als Laufzeiteffekte zwischen den Atomen A_{j+1} und A_j bekannt ist. Die Laufzeiteffekte geben uns wie im obigen Sinne die Verkopplung der Photonen mit den Atomen wieder, in dem Sinne, daß wir nach dem Zustand derjenigen resonanten Amplitude fragen, bei der " A_j angeregt, A_{j+1} im Grundzustand und ein Photon der Charakteristik $M_j(k_1)$ " existent sein soll, wobei Atom A_j durch das von A_{j+1} emittierte Photon wieder angeregt wird. In (B.4) ist diese Verkopplung wiederum durch den Term $|\Gamma_{j+1}|$ zum Ausdruck gebracht.

Die Zweiphotonenamplitude komponiert sich aus a) und b).

$$B[b_j, b_{j+1}, \dots]_1(k_1, k_2) = -i \mathcal{P} \sum_{k_2} \frac{M_j(k_1)}{\delta i (\omega(k_1) + \omega(k_2) - E_{b_j} - E_{b_{j+1}})} \left(B^{\nu}[b_j, b_{j+1}, \dots]_1(k_2) + A^{\nu}[b_j, b_{j+1}, \dots]_1(k_2) \right) \quad (4.6)$$

Wie die Formel (4.6) zeigt, setzt sich die Zweiphotonenamplitude aus der spontanen und resonanten Einphotonenamplitude nach a) und b) zusammen, wobei das angeregte Atom A_j sein Photon spontan emittiert.

§4.2 Der Prozeß Erster Ordnung: zwei angeregte Atome und ein inzidentes Photon

Der Ansatz (3.10), der uns die hierarchische Struktur für Probleme mit einem einfallenden Photon bloßlegte, gibt uns auch eine gute Möglichkeit zur Interpretation der Lösungen (3.27-3.29). In der Gesamtlösung, die nach (3.10) eine Überlagerung von γ - und β -Amplituden ist, muß sich als Prozeß Nullter Ordnung im Sinne von §4.1 der allgemeine Charakter des spontanen Zerfalls zweier angeregter Atome -ausgedrückt durch die β -Amplitude- immer zeigen. Dies gilt insbesondere für den Fall, in dem das einfallende Photon die angeregten Atome nicht trifft. Dann sind wegen $g_j(t) \equiv 0$, welches ja die "Überlappung des j-ten Atoms durch das inzidente Photon ausdrückt, alle $F^j[\underline{b}; \underline{a}, \underline{a}_j, \underline{1}_j](u_1) \equiv F^j[\underline{b}; \underline{a}, \underline{a}_j, \underline{1}_j](u_1, u_2) \equiv 0$ und wegen der Anfangsbedingung (3.8) auch alle γ -Amplituden; d.h. in der Gesamtamplitude α (3.10) liefert nur der Term des spontanen Zerfalls zweier angeregter Atome einen Beitrag. Dabei spielt das inzidente Photon $\chi(u_1) e^{-i u_1 t}$ praktisch keine Rolle. Diesen immer vorhandenen spontanen Zerfallsprozeß wollen wir im Folgenden außer Betracht lassen und für das inzidente Photon echte Überlappung, also $g_j(t) \neq 0$, annehmen.

a) die Einphotonenamplitude

Damit wir neben dem reinen spontanen Zerfall auch noch andere Wechselwirkungsprozesse zwischen dem inzidenten Photon und den beiden angeregten Atomen erfassen können, muß noch eine zusätzliche Bedingung erfüllt sein, nämlich $\beta[\underline{c}; \underline{a}_j, \underline{b}_{j+1}, \underline{1}_j](u_1) \neq 0$. Denn lesen wir die Rücktransformierte von $\Psi[\underline{b}, \underline{b}_{j+1}, \underline{1}_j](u_1)$ von hinten

nach vorne, d.h.

$$\Psi[\xi; b, b_1](\kappa) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \langle b, b_1 | U(\kappa) | b, b_1 \rangle \sum_j F_j^i[\xi; q, b_j](\kappa) \rightarrow -ie^{-i\kappa \omega} \beta[\xi; b, b_1] \circ \sum_j q_j \omega \beta[\xi; q, b_j](\kappa) = \psi[\xi; b, b_1](\kappa) \quad (4.7)$$

- $\circ$ bezeichnet die Faltung zwischen den beiden Ausdrücken-, so bedeutet das für die Amplitude $\psi[\xi; b, b_1](\kappa)$, daß erst der Zustand $\beta[\xi; q, b_j](\kappa)$ -also " A_{j+1} angeregt, A_j im Grundzustand und ein Photon existent"- realisiert sein muß, dessen Wahrscheinlichkeit uns die spontane und resonante Einphotonenamplitude nach §4.1 (4.4, 4.5) beschreibt. Dann überlappt das einfallende Photon das Atom A_j . Die Faltung der spontanen Amplitude $\beta[\xi; b, b_1]$ mit der Überlappungsfunktion des j -ten Atoms $\sum_j q_j \omega \beta[\xi; q, b_j](\kappa)$ bedeutet nach (4.2) die Absorption des inzidenten Photons vom Atom A_j . Die Amplitude $\psi[\xi; b, b_1](\kappa)$ beschreibt den Emissions-Absorptionsprozeß eines Atoms mit dem inzidenten Photon ($A_j^a \downarrow \kappa, A_{j+1}^a$; A_j^a : j -tes Atom angeregt).

Betrachten wir die exakte Theorie, d.h. unter Berücksichtigung der Integralgleichung -dies wird für den Fall der Wechselwirkung eines inzidenten Photons mit einem angeregten Atom im Anhang D diskutiert- so erhalten wir folgende zusätzliche Effekte. Nachdem ein Atom sein Photon emittiert und A_j das inzidente Photon absorbiert hat, werden aus der "Photonenwolke", die den Atomverband überlagert, in allen möglichen Kombinationen die Photonen zwischen den Atomen durch Emissions-Absorptionsprozesse ausgetauscht unter der Bedingung, daß sich unser System im Zustand "beide Atome angeregt und ein von einem Atom spontan emittiertes Photon vorhanden" befinden soll. Dies kann z.B. durch zyklische Vertauschung der Photonen realisiert sein ($\dots A_j^a \xrightarrow{\kappa} A_{j+1}^a \xrightarrow{\kappa} A_j^a \xrightarrow{\kappa} A_{j+1}^a \xrightarrow{\kappa} A_j^a \dots$).

Als einen interessanten Spezialfall betrachten wir die Situation für $\psi_{t_0; b, k_1}(u)$ bei $t=t_0=0$. Hier lernen wir etwas über den Einfluß eines inzidenten Photons auf noch angeregte Atome. Auf Grund der Anfangsbedingung (3.8) ist $\psi_{t_0; b, k_1}(u)=0$. Dabei ist es gleichgültig, an welchem Ort sich das einfallende Photon befindet. Es kann sogar die angeregten Atome überlappen, $g_j(t) \neq 0$. Da aber gleichzeitig $\psi_{t_0; b, k_1} \neq 0$ wegen der Anfangsbedingung (3.6) ist, liefert nur der spontane Zerfall der beiden angeregten Atome den einzigen Beitrag zur Einphotonenamplitude α in (3.10a), d.h. auch wenn das inzidente Photon die angeregten Atome überlappt, beginnen sie immer zuerst spontan zu zerfallen.

b) die Zweiphotonenamplitude

Die Zweiphotonenamplitude setzt sich aus zwei Komplexen zusammen, die die "Vorgeschichte" des einfallenden Photons widerspiegeln.

1) Für den Fall, daß $\beta_{t_0; b, q_1}(u) \neq 0$ aber $\beta_{t_0; a, q_1}(u, v)=0$ ist, gibt nur der Term $-i \int_{u_1, u_2}^{u_3} \delta[\dots](u_1, u_2) (F'[\dots](u_1) + F''[\dots](u_1))$ einen Beitrag zur $\psi[t; b, q_1](u, v)$ -Amplitude. Hierbei ist folgende physikalische Situation unterstellt: Der Ausdruck in der Klammer beschreibt die Emission eines Photons und die Überlappung eines Atoms von dem inzidenten Photon, wobei der erste Term besagt, daß die Nullphotonenamplitude des spontanen Zerfalls zweier angeregter Atome übergeht in die spontane und resonante Einphotonenamplitude mit der Nebenbedingung, daß "Atom A_1 im Grundzustand, A_2 angeregt und ein von einem Atom spontan emittiertes Photon" vorhanden sein soll, wie wir in §4.1 beschrieben haben, während das einfallende Photon A_1 überlappt. Im zweiten Term werden die Atome A_1 und A_2 vertauscht und das inzidente Photon überlappt jetzt A_2 . Der Term vor der Klammer

bedeutet analog (4.2), daß das inzidente Photon vom jeweiligen Atom, das es überlappt, absorbiert wird, so daß beide Atome wieder angeregt sind und ein von einem Atom spontan emittiertes Photon vorhanden ist. Für die beiden angeregten Atome setzt wiederum der Zerfallsprozeß nach §4.1 (4.4, 4.5) ein mit der Bedingung: " A_j angeregt, A_{j+1} im Grundzustand und zwei Photonen vorhanden" ($A_j^a \downarrow \kappa_1 \downarrow \kappa_2$ A_{j+1}^g ; A_j^g : Atom A_j im Grundzustand). In der exakten Theorie werden, wie in der Einphotonenamplitude beschrieben, noch alle möglichen Austauscheffekte der Photonen zwischen den Atomen berücksichtigt (z.B. ... $A_j^a \xrightarrow{\kappa_1} A_{j+1}^g$, $A_j^g \xrightarrow{\kappa_2} A_{j+1}^a$, $A_j^a \xrightarrow{\kappa_2} A_{j+1}^g$, $A_j^g \xrightarrow{\kappa_1} A_{j+1}^a$, ...).

ii) Im Falle $\beta(\vec{k}, \vec{q}, \vec{q}, \vec{k}) \neq 0$ aber $\beta(\vec{k}, \vec{q}, \vec{q}, \vec{k}) = 0$ geben nur die Terme $-i \tilde{B}(\vec{k}, \vec{q}, \vec{q}, \vec{k}) b_j b_{j+1} [F(\vec{k}, \vec{q}, \vec{q}, \vec{k}) - i \tilde{A}(\vec{k}, \vec{q}, \vec{q}, \vec{k}) b_j b_{j+1}] F(\vec{k}, \vec{q}, \vec{q}, \vec{k})$ einen Beitrag zur $\psi(\vec{k}, \vec{q}, \vec{q}, \vec{k})$ -Amplitude. Dabei muß das inzidente Photon bei $t=0$ so weit von den beiden angeregten Atomen entfernt sein, daß beide bereits in den Grundzustand unter Emission zweier Photonen κ_1 und κ_2 nach §4.1 übergegangen sind. Dann besagt der erste Term, daß das inzidente Photon vom Atom A_j absorbiert worden ist (4.2) und " A_j angeregt, A_{j+1} im Grundzustand und zwei Photonen vorhanden". Die beiden Atome sind dann noch über die Laufzeiteffekte miteinander verkoppelt (4.1). Während der zweite Term bedeutet, daß das inzidente Photon von A_{j+1} absorbiert wird (4.2) und über die Laufzeiteffekte nach (4.3) als Emissions-Absorptionsprozeß Atom A_j anregt.

Die Vorgänge i) und ii) sind nicht zeitlich getrennt, sondern können fließend ineinander übergehen.

c) die Dreiphotonenamplitude

Die Lösung der Dreiphotonenamplitude (3.29) geht von denselben beiden Ausgangssituationen aus wie bei der Zweiphotonen-

amplitude, d.h. für i) gibt nur der Term $-i \sum_{k_1, k_2} \bar{P} \bar{B} \bar{B} + i \delta_{k_1, k_2} \bar{B} \bar{B} \bar{B} (k_1, k_2) \times$
 $\sum_{j=1}^N F^j [z, q, p_{j+1}, (k_1)]$ einen Beitrag zur Dreiphotonenamplitude, wobei
 der hintere Term die schon oben beschriebene Emission eines
 Photons und die Überlappung des j-ten Atoms vom inzidenten
 Photon ausdrückt. Der Term vor der Summe beschreibt die Ab-
 sorption des inzidenten Photons, beide Atome sind wieder an-
 geregt und zerfallen dann spontan nach dem Mechanismus, der
 in §4.1 analysiert worden ist. Wenn die Situation ii) vorliegt,
 wird der Term $-i \sum_{k_1, k_2} \bar{P} \bar{B} \bar{B} \bar{B} [z, q, p_{j+1}, (k_1), q, p_{j+1}, (k_2)] F^j [z, q, p_{j+1}, (k_1, k_2)]$ dominant, d.h.
 nachdem beide Atome spontan zerfallen sind (§4.1) und das in-
 zidente Photon das j-te Atom überlappt, bedeutet der Term
 $\bar{B}^j [z, q, p_{j+1}, (k_1, k_2)] q, p_{j+1}, (k_1)$ nach (4.2) und (3.31): das Atom A_j absor-
 biert das inzidente Photon und zerfällt über die Laufzeiteffek-
 te als spontane Amplitude gemäß (4.1) in den Grundzustand
 oder das Atom A_{j+1} geht als resonante Amplitude ebenfalls
 unter Emission seines Photons in den Grundzustand über.

Wie bei der Zweiphotonenamplitude sind beide Ausgangssitu-
 ationen auch hier zeitlich ineinander übergehend denkbar.

§4.3 Zusammenfassung

Die Analyse der Lösungen zeigt, daß sich die Dynamik der
 Wechselwirkung zwischen zwei angeregten Atomen und einem inzi-
 denten Photon durch Emissions- und Absorptionsprozesse erklä-
 ren läßt. Dabei haben wir den spontanen Zerfall zweier ange-
 regter Atome, wie ihn ERNST und STEHLE in [3] behandelt haben,
 erneut diskutiert und unser Augenmerk hauptsächlich auf die
 Dynamik gerichtet. Es gelang uns den Zerfall zweier Atome
 und zweier Photonen auf den Zerfall zweier Atome und ein Photon
 zurückzuführen, der über einen spontanen (4.1) und einen re-

sonanten Zerfallsprozeß (4.3) in der Grundzustand übergeht. In dem wir im wesentlichen $M(k, \beta E, k_A)_0$ an (4.1) und (4.3) heranzmultiplizieren, können wir den Zerfall zweier angeregter Atome ebenfalls durch eine spontane und resonante Amplitude erklären. Der andere wesentliche Prozeß war die Absorption des inzidenten Photons. Dabei haben wir gesehen, daß die beiden angeregten Atome erst begonnen haben müssen, spontan zu zerfallen. Dann war das Atom bereit, das inzidente Photon zu absorbieren, falls es das Atom überlappt. Die zentrale Rolle dieser Absorptionsprozesse spielt die Funktion $g_j(t)$ und deren Faltung mit einer spontanen Amplitude (4.2), die uns eine resonante Amplitude liefert. Die Struktur der Lösungen zeigt, daß sich die Gesamtamplituden aus allen denkbaren Kombinationen von Emissions- und Absorptionsprozessen oder spontanen und resonanten Amplituden zwischen den drei Photonen und den zwei Atomen komponieren lassen.

Betrachten wir die Rücktransformierten der Lösungen im (k, t) -Bild, so stellen wir fest, daß für dicht beieinanderliegende Atome, d.h. $|r_A| \rightarrow r$, nur die Terme aus den Kombinationen der spontanen Amplituden einen Beitrag zur Gesamtamplitude liefern. Am Beispiel der Dreiphotonenamplitude sehen wir für $|r_A| \rightarrow r$ und $t \rightarrow \infty$, daß nur die zwei Terme dominant werden, in denen sich die Strahlungscharakteristiken aufsummieren (B.17). Von unserem Betrachtungsstandpunkt besteht der Einfluß des inzidenten Photons auf zwei angeregte Atome in einer Vergrößerung der Permutationssumme um das inzidente Photon, so daß eventuelle Winkelkorrelationen zwischen den Photonen, die beim Zerfallsprozeß angeregter Atome entstehen können (Laser, Superstrahlung), durch inzidente Photonen erheblich verstärkt würden.

Anhang A: Ansatz für n inzidente Photonen und zwei
angeregte Atome mit faktorisierender
Anfangsamplitude

Unter den Voraussetzungen des §3.1 falle auf zwei angeregte Atome n inzidente Photonen. Dann lautet unsere Indexmenge:

$$I_1 = \left\{ (b_1, b_2; u), (b_1, a_2; u+1), (a_1, b_2; u+1), (a_1, a_2; u+2) \right\} \quad (\text{A.1})$$

Die Bewegungsgleichungen haben die Form:

$$i \frac{d}{dt} \alpha[\bar{t}; b_1, b_2]_u(x_1, \dots, x_u) = \left(\omega(b_1) + \dots + \omega(b_u) + E_{a_1} + E_{a_2} \right) \alpha[\bar{t}; b_1, b_2]_u(x_1, \dots, x_u) \quad (\text{a})$$

$$+ (u+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^2 \int d^3k M_j^p(k) \alpha[\bar{t}; a_j, b_{j+u}]_{u+1}(x, x_1, \dots, x_u) \quad (\text{A.2})$$

$$i \frac{d}{dt} \alpha[\bar{t}; b_j, a_j]_{u+1}(x_1, \dots, x_{u+1}) = \left(\omega(b_1) + \dots + \omega(b_{u+1}) + E_{b_j} + E_{a_j} \right) \alpha[\bar{t}; b_j, a_j]_{u+1}(x_1, \dots, x_{u+1})$$

$$+ (u+2)^{-\frac{1}{2}} \int d^3k M_j^p(k) \alpha[\bar{t}; a_1, a_2]_{u+2}(x, x_1, \dots, x_{u+1}) \quad (\text{b})$$

$$+ (u+1)^{-\frac{1}{2}} \prod_{k_1, \dots, k_{u+1}}^{x_1, \dots, x_{u+1}} M_{j,u}(k_1) \alpha[\bar{t}; b_1, b_2]_{u+1}(k_2, \dots, k_{u+1})$$

} mod 2

$$i \frac{d}{dt} \alpha[\bar{t}; a_1, a_2]_{u+2}(x_1, \dots, x_{u+2}) = \left(\omega(b_1) + \dots + \omega(b_{u+2}) + E_{a_1} + E_{a_2} \right) \alpha[\bar{t}; a_1, a_2]_{u+2}(x_1, \dots, x_{u+2}) \quad (\text{c})$$

$$+ (u+2)^{-\frac{1}{2}} \prod_{k_1, \dots, k_{u+2}}^{x_1, \dots, x_{u+2}} \sum_{j=1}^2 M_j^p(k_1) \alpha[\bar{t}; a_j, b_{j+u+1}](k_2, \dots, k_{u+2})$$

Wir suchen die Lösungen dieser Gleichungen für den speziellen Fall, daß die Anfangsamplitude faktorisiert. Somit sind die

Anfangsbedingungen:

$$\chi[\bar{0}; b_1, b_2]_{u_1} (x_1, \dots, x_u) = \chi[\bar{b}_1, b_2]_{u_1} (x_1, \dots, x_u) = \chi(x_1) \dots \chi(x_u) \quad (\text{A.3})$$

$$\alpha[\bar{0}; b_1, a_2]_{u_1} (x_1, \dots, x_{u+1}) = \alpha[\bar{0}; a_1, a_2]_{u+1} (x_1, \dots, x_{u+1}) = 0$$

Für die einfallende Photonenamplitude gilt die Normierungsbedingung

$$\int d^3x_1 \dots \int d^3x_n |\chi(x_1)|^2 \dots |\chi(x_n)|^2 = 1 \quad (\text{A.4})$$

Dann vermuten wir folgenden Satz:

Seien $\psi[\bar{t}; b_1, b_2]_0, \dots, \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_{n+1}$ die Lösungen der Radialgleichungssysteme

$$i \frac{d}{dt} \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_0 = (E_{b_1} + E_{b_2}) \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_0 + \sum_{j=1}^2 \int d^3x H_j''(x) \psi[\bar{t}; b_j, b_{j+1}]_1(x) \quad (\text{a})$$

$$i \frac{d}{dt} \psi[\bar{t}; b_j, a_{j+1}]_1(x_1) = (\omega(x_1) + E_{b_j} + E_{a_{j+1}}) \psi[\bar{t}; b_j, a_{j+1}]_1(x_1) + \int d^3x H_j''(x) \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_2(x, x_1) \quad (\text{b})$$

$$+ H_{j+1}(x_1) \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_0 \quad j \bmod 2 \quad (\text{A.5})$$

$$i \frac{d}{dt} \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_2(x_1, x_2) = (\omega(x_1) + \omega(x_2) + E_{a_1} + E_{a_2}) \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_2(x_1, x_2) \quad (\text{c})$$

$$+ \sum_{k_1, k_2}^{x, x_2} \sum_{j=1}^2 H_j(k_1) \psi[\bar{t}; b_j, a_{j+1}]_1(x_2) \quad ,$$

⋮
⋮
⋮
⋮
⋮

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{dt} \psi[t; b_1, b_2]_n(x_1, \dots, x_n) &= (\omega(x_1) + \dots + \omega(x_n) + E_{b_1} + E_{b_2}) \psi[t; b_1, b_2]_n(x_1, \dots, x_n) \\
 &+ \sum_{j=1}^n \int d^3x H_j^x(x) \psi[t; a_j, b_{j+1}]_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n) \\
 &+ \sum_{j=1}^2 g_j(t) \psi[t; a_j, b_{j+1}]_n(x_1, \dots, x_n)
 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{dt} \psi[t; b_j, a_{j+1}]_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= (\omega(x_1) + \dots + \omega(x_{n+1}) + E_{a_j} + E_{a_{j+1}}) \psi[t; b_j, a_{j+1}]_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) \\
 &+ \int d^3x H_j^x(x) \psi[t; a_j, a_{j+1}]_{n+2}(x, x_1, \dots, x_{n+1}) \\
 &+ \sum_{k_1, \dots, k_{n+1}}^{x_1, \dots, x_{n+1}} M_{j+1}(k_1) \psi[t; b_1, b_2]_n(k_2, \dots, k_{n+1}) \\
 &+ g_j(t) \psi[t; a_j, a_{j+1}]_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})
 \end{aligned} \quad (b)$$

(A.6)

$$\begin{aligned}
 i \frac{d}{dt} \psi[t; a_1, a_2]_{n+2}(x_1, \dots, x_{n+2}) &= (\omega(x_1) + \dots + \omega(x_{n+2}) + E_{a_1} + E_{a_2}) \psi[t; a_1, a_2]_{n+2}(x_1, \dots, x_{n+2}) \\
 &+ \sum_{k_1, \dots, k_{n+2}}^{x_1, \dots, x_{n+2}} \sum_{j=1}^2 M_j(k_1) \psi[t; b_j, a_{j+1}]_{n+1}(k_2, \dots, k_{n+2})
 \end{aligned} \quad (c)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\psi[0; b_1, b_2]_n = (n!)^{-1}, \quad \psi[0; b_j, a_{j+1}]_n(k_1) = \dots = \psi[0; a_1, a_2]_{n+2}(x_1, \dots, x_{n+2}) = 0, \quad (A.7)$$

dann löst der Ansatz

$$\alpha[\bar{t}; b_1, b_2]_{n_1} (x_1, \dots, x_n) = \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_{n_1} (x_1, \dots, x_n) + \sum_{k_1, \dots, k_n}^{x_1, \dots, x_n} \chi(k_1) e^{-i\omega(k_1)\bar{t}} \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_{n_1} (k_1, \dots, k_n) + \dots \quad (A.8)$$

$$+ \sum_{k_1, \dots, k_n}^{x_1, \dots, x_n} \chi(k_1) \dots \chi(k_n) e^{-i(\omega(k_1) + \dots + \omega(k_n))\bar{t}} \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_0 \quad (a)$$

$$\alpha[\bar{t}; b_1, b_2]_{n_1+1} (x_1, \dots, x_{n+1}) = (n+1)^{-1/2} \left\{ \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_{n_1+1} (x_1, \dots, x_{n+1}) + \sum_{k_1, \dots, k_{n+1}}^{x_1, \dots, x_{n+1}} \chi(k_1) e^{-i\omega(k_1)\bar{t}} \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_{n_1} (k_1, \dots, k_{n+1}) + \dots \right.$$

$$\left. + \sum_{k_1, \dots, k_{n+1}}^{x_1, \dots, x_{n+1}} \chi(k_1) \dots \chi(k_{n+1}) e^{-i(\omega(k_1) + \dots + \omega(k_{n+1}))\bar{t}} \psi[\bar{t}; b_1, b_2]_0 (k_{n+1}) \right\} \quad (b)$$

$$\alpha[\bar{t}; a_1, a_2]_{n+2} (x_1, \dots, x_{n+2}) = (n+1)^{-1/2} (n+2)^{1/2} \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_{n+2} (x_1, \dots, x_{n+2}) \quad (c)$$

$$+ \sum_{k_1, \dots, k_{n+2}}^{x_1, \dots, x_{n+2}} \chi(k_1) e^{-i\omega(k_1)\bar{t}} \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_{n+1} (k_1, \dots, k_{n+2}) + \dots$$

$$+ \sum_{k_1, \dots, k_{n+2}}^{x_1, \dots, x_{n+2}} \chi(k_1) \dots \chi(k_{n+2}) e^{-i(\omega(k_1) + \dots + \omega(k_{n+2}))\bar{t}} \psi[\bar{t}; a_1, a_2]_2 (k_{n+2}, k_{n+2})$$

die Ausgangsgleichungen (A.2) zur Anfangsbedingung (A.3).

Wir haben den Beweis des Satzes nicht im Einzelnen durchgeführt, da er erheblichen Rechenaufwand erfordert. Jedoch ist der Ansatz an zwei Beispielen (zwei Atome und vier Photonen, zwei Atome und fünf Photonen) erfolgreich getestet worden, so daß berechnete Hoffnungen für die Gültigkeit auch im allgemeinen Falle von n inzidenten Photonen besteht.

Die Hierarchie von (A.6) ist ein Ordnungsprinzip nach der Anzahl der inzidenten Photonen, d.h. für n inzidente Photonen stehen n Gleichungssysteme zur Verfügung. Die Nullte Ordnung n=0 bedeutet kein inzidenten Photon und Gleichung (A.5) mit der Anfangsbedingung (A.7) beschreibt den spontanen Zerfall zweier angeregter Atome [3]. Der Fall n=1, d.h. ein

inzidenten Photon fällt auf zwei angeregte Atome, ist in dieser Arbeit behandelt. Für alle höheren Ordnungen $n \geq 2$ werden jeweils die Lösungen der nächst niedrigeren Ordnung $n-1$ mit einer $g_j(t)$ -Funktion im inhomogenen Term verkoppelt. Physikalisch können wir die Hierarchie so verstehen, daß ein inzidenten Photon nach dem anderen von den Atomen absorbiert und emittiert wird, bis alle Photonen 'aufgebraucht' sind. Für jeden Absorptionsprozeß eines inzidenten Photons benötigen wir ein Gleichungssystem.

Anhang B: Laplace-Rücktransformationen der Lösungen
Nullter und Erster Ordnung in der Exponen-
tialnäherung

In diesem Anhang wollen wir die gesamten Lösungen der Gleichungssysteme (3.5) und (3.7) zusammenfassen.

$$\beta^{sr}[s; a_1, b_2]_0 = \frac{1}{s + i(E_{a_1} + E_{b_2}) + 2\Gamma} \quad (\text{B.1a})$$

$$\beta^{sr}[t; a_1, b_2]_0 = e^{-i(E_{a_1} + E_{b_2})t} e^{-2\Gamma t} \quad (\text{B.1b})$$

$$\beta^{sr}[s; q_1, q_{j+1}]_0 = \frac{s + i(E_{q_1} + E_{q_{j+1}}) + \Gamma}{(s + i(E_{q_1} + E_{q_{j+1}}) + \Gamma)(s + i(E_{q_1} + E_{q_{j+1}}) + \Gamma) - |\Gamma_{12}|^2} \quad (\text{B.2a})$$

$$\beta^{sr}[t; q_1, q_{j+1}]_0 = \frac{1}{2} e^{-i(E_{q_1} + E_{q_{j+1}})t} \left(e^{-(\Gamma + |\Gamma_{12}|)t} + e^{-(\Gamma - |\Gamma_{12}|)t} \right) \quad (\text{B.2b})$$

$$\alpha^{sr}[s; b_j, q_{j+1}]_0 = \frac{-|\Gamma_{12}|}{(s + i(E_{q_j} + E_{q_{j+1}}) + \Gamma)(s + i(E_{q_j} + E_{q_{j+1}}) + \Gamma) - |\Gamma_{12}|^2} \quad (\text{B.3a})$$

$$\alpha^{sr}[t; b_j, q_{j+1}]_0 = \frac{1}{2} e^{-i(E_{q_j} + E_{q_{j+1}})t} \left(e^{-(\Gamma + |\Gamma_{12}|)t} - e^{-(\Gamma - |\Gamma_{12}|)t} \right) \quad (\text{B.3b})$$

$$\beta[s; q_j, b_{j+1}]_1(x_1) = -i \beta^{sr}[s + i\omega(x_1); q_j, b_{j+1}]_0 H_{y_{j+1}}(x_1) \beta^{sr}[s; a_1, b_2]_0 - i \beta^{sr}[s + i\omega(x_1); q_j, b_{j+1}]_0 H_{y_j}(x_1) \beta^{sr}[s; b_1, b_2]_0 \quad (\text{B.4a})$$

$$\begin{aligned} \beta^{sr}[t; q_j, b_{j+1}]_1(x_1) = & -\frac{1}{2} e^{-i(\omega(x_1) + E_{q_j} + E_{b_{j+1}})t} \left[\left(H_{y_j}(x_1) + H_{y_{j+1}}(x_1) \right) e^{-(\Gamma + |\Gamma_{12}|)t} \frac{1 - e^{-i(\Delta - \omega(x_1))t}}{i(\Delta - \omega(x_1)) + \Gamma - |\Gamma_{12}|} e^{-i(\Gamma - |\Gamma_{12}|)t} \right. \\ & \left. + \left(H_{y_{j+1}}(x_1) - H_{y_j}(x_1) \right) e^{-(\Gamma - |\Gamma_{12}|)t} \frac{1 - e^{-i(\Delta + \omega(x_1))t}}{i(\Delta + \omega(x_1)) + \Gamma + |\Gamma_{12}|} e^{-i(\Gamma + |\Gamma_{12}|)t} \right] \quad (\text{B.4b}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}^i[\varepsilon; a_i, a_s]_1(k_i) = -i \frac{H_j(k_i)}{S_{+1}(\omega(k_i) + E_{a_i} + E_{a_s})} \mathcal{B}^{\varepsilon^*}[\varepsilon; b_j, b_{j+1}]_0 - i \frac{H_{j+1}(k_i)}{S_{+1}(\omega(k_i) + E_{a_i} + E_{a_s})} \mathcal{A}^*[\varepsilon; a_j, b_{j+1}]_0 \quad (\text{B.5a})$$

$$\begin{aligned} \beta^i[\varepsilon; a_i, a_s]_1(k_i) = & -\frac{i}{2} e^{-i(\omega(k_i) - E_{a_i} + E_{a_s})t} \left[\left(H_j(k_i) + H_{j+1}(k_i) \right) \frac{1 - e^{-i(\delta - \omega(k_i))t} e^{-(\Gamma - |\Gamma_{12}|)t}}{i(\delta - \omega(k_i)) + \Gamma - |\Gamma_{12}|} \right. \\ & \left. + \left(H_j(k_i) - H_{j+1}(k_i) \right) \frac{1 - e^{-i(\delta - \omega(k_i))t} e^{-(\Gamma - |\Gamma_{12}|)t}}{i(\delta - \omega(k_i)) + \Gamma - |\Gamma_{12}|} \right] \quad (\text{B.5b}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}[\varepsilon; a_i, a_s]_2(x_i, x_s) = -i \mathcal{P} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{H_j(k_i)}{S_{+1}(\omega(k_i) + \omega(k_s) + E_{a_i} + E_{a_s})} \mathcal{B}[\varepsilon; b_j, b_{j+1}]_1(k_s) \quad (\text{B.6a})$$

$$\begin{aligned} \beta[\varepsilon; a_i, a_s]_2(x_i, x_s) = & -\frac{i}{2} \mathcal{P} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-i(\omega(k_i) + \omega(k_s) + E_{a_i} + E_{a_s})t} \left\{ \sum_{j'=1}^{\infty} \frac{H_j(k_i) (H_j(k_s) + H_{j+1}(k_s))}{i(\delta - \omega(k_i)) + \Gamma - |\Gamma_{12}|} \right. \\ & \times \left[\frac{1 - e^{-i(\delta - \omega(k_i))t} e^{-(\Gamma - |\Gamma_{12}|)t}}{i(\delta - \omega(k_i)) + \Gamma - |\Gamma_{12}|} - \frac{1 - e^{-i(\delta - \omega(k_i) + \delta - \omega(k_s))t} e^{-2\Gamma t}}{i(\delta - \omega(k_i) + \delta - \omega(k_s)) + 2\Gamma} \right] \\ & \left. + \sum_{j'=1}^{\infty} \frac{H_j(k_i) (H_j(k_s) - H_{j+1}(k_s))}{i(\delta - \omega(k_i)) + \Gamma - |\Gamma_{12}|} \left[\frac{1 - e^{-i(\delta - \omega(k_i))t} e^{-(\Gamma - |\Gamma_{12}|)t}}{i(\delta - \omega(k_i)) + \Gamma - |\Gamma_{12}|} - \frac{1 - e^{-i(\delta - \omega(k_i) + \delta - \omega(k_s))t} e^{-2\Gamma t}}{i(\delta - \omega(k_i) + \delta - \omega(k_s)) + 2\Gamma} \right] \right\} \quad (\text{B.6b}) \end{aligned}$$

Diese Lösungen stimmen mit denen von ERNST und STEHLE [3] überein. Mit ihrer Hilfe können wir die Laplace-Rücktransformationen der Lösungen (3.27-3.29) ausführen.

a) die Einphotonenamplitude

$$\Psi[\varepsilon; b_i, b_s]_1(k_i) = -i \mathcal{B}^{\varepsilon^*}[\varepsilon; \omega(k_i), b_i, b_s]_0 \sum_{j=1}^{\infty} F^i[\varepsilon; a_j, b_{j+1}]_1(k_i) \quad (\text{B.7})$$

$$\Psi[t; b_1, b_2](k) = \frac{1}{2} e^{-i(\omega(k) + E_{b_1} + E_{b_2})t} e^{-2\Gamma t} \sum_{j=1}^2 \int_0^t dt' \overline{g_j(t')} \left[\left(H_j(b_1) + H_j(b_2) \right) \frac{e^{-i(\omega(k) - \Delta)t'} (r - i\Gamma_{\text{ad}})t'}}{-1(\omega(k) - \Delta) + r - i\Gamma_{\text{ad}}} + \left(H_{j_{\text{sp}}}(b_1) - H_j(b_1) \right) \frac{e^{-i(\omega(k) - \Delta)t'} (r + i\Gamma_{\text{ad}})t'}}{-i(\omega(k) - \Delta) + r + i\Gamma_{\text{ad}}} \right] \quad (\text{B.8})$$

$$\overline{g_j(t)} = g_j(t) e^{i\Delta t}$$

Die Darstellung im t-Bild legt Strukturen offen, die uns im s-Bild verborgen bleiben. So zeigt die Einphotonenamplitude (B.8), daß für sehr dicht beieinanderliegende Atome der erst Term in der Klammer den Hauptbeitrag liefert. Der Ursprung dieses Termes läßt sich auf die spontane Einphotonenamplitude (B.4b) des Zerfalls zweier angeregter Atome zurückführen, d.h. der Zerfall über die spontane Einphotonenamplitude ist wahrscheinlicher als über die resonante. Dies steht im Einklang mit den Ergebnissen von ERNST [7]. Auch für die Zwei- und Dreiphotonenamplitude wird der Zerfall über die spontane Amplitude bevorzugt.

b) die Zweiphotonenamplitude

$$\Psi[b_1, b_2, g_{j_1} I_2](k_1, k_2) = -i B^{2\gamma}[s+i(\omega(k_1) + \omega(k_2)), b_1, g_{j_1}]_0 F^{2\gamma}[s, a, b_2]_2(k_1, k_2) - i A^{2\gamma}[s+i(\omega(k_1) + \omega(k_2)), b_1, g_{j_1}]_0 F^{2\gamma}[s, a, b_2]_2(k_1, k_2) - i \int_{k_1, k_2}^{k_1, k_2} B[s+i(\omega(k_1)), b_1, g_{j_1} I_1](k_1) \sum_{j'=1}^2 F^{2\gamma}[s, a, b_2, j_1 I_1](k_1) \quad (\text{B.9})$$

$$\Psi[t; b_1, g_{j_1} I_2](k_1, k_2) = \frac{i}{4} \int_{k_1, k_2}^{k_1, k_2} e^{-i(\omega(k_1) + \omega(k_2) + E_{g_{j_1}} + E_{g_{j_2}})t} \left\{ e^{-(r - i\Gamma_{\text{ad}})t} \int_0^t dt' e^{i(\omega(k) - \Delta + \omega(k_1) - \Delta)t'} + \sum_{j'=1}^2 \left[\overline{g_{j'}(t')} G_1(j, j'; k_1, k_2; t') + (\overline{g_{j'}(t')} - \overline{g_{j_{\text{sp}}}(t')}) G_2(j, j'; k_1, k_2; t') \right] \right\} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned}
 & + e^{-\Gamma + i\Gamma_{12}} \int_0^t dt' e^{i(\omega(k_1) - \delta + \omega(k_2) - \Delta)t'} \sum_{j'=1}^2 \left[\overline{g_{j'}}(t') Q_3(j, j'; u_1, u_2; c') + (g_j(t') - \overline{g_{j+1}}(t')) Q_4(j, j'; u_1, u_2; c') \right] \\
 & + \frac{i}{4} \prod_{k_1, k_2} e^{-i(\omega(k_1) + E_{g_1} + E_{g_2})t} e^{-2\Gamma t} \int_0^t dt' \sum_{j'=1}^2 \overline{g_{j'}}(t') Q_5(j, j'; u_1, u_2; c') \\
 Q_1(j, j'; k_1, k_2; t) := & \frac{M_j(k_2) - M_{j+1}(k_2)}{i(\delta - \omega(k_2)) + \Gamma + i\Gamma_{12}} \left[\left(M_j(k_1) + M_{j+1}(k_1) \right) \frac{e^{i(\delta - \omega(k_1))t} - 2i\Gamma_{12}t - (\Gamma + i\Gamma_{12})t}}{i(\delta - \omega(k_1)) + \Gamma - i\Gamma_{12}} \right. \\
 & \left. + \left(M_{j+1}(k_1) - M_j(k_1) \right) \frac{e^{i(\delta - \omega(k_1))t} - (\Gamma + i\Gamma_{12})t}}{i(\delta - \omega(k_1)) + \Gamma + i\Gamma_{12}} \right] \quad (B.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2(j, j'; k_1, k_2; t) := & \frac{M_j(k_1)(M_j(k_2) - M_{j+1}(k_2))}{i(\delta - \omega(k_2)) + \Gamma + i\Gamma_{12}} \left[\frac{(\Gamma - i\Gamma_{12})t - i(\omega(k_1) - \delta + \omega(k_2) - \Delta)t}{e} \frac{e^{-i(\omega(k_2) - \delta)t}}{e} \right. \\
 & \left. - \frac{(\Gamma - i\Gamma_{12})t - i(\omega(k_1) - \delta + \omega(k_2) - \Delta)t}{e} \frac{e^{-(\Gamma + i\Gamma_{12})t}}{e} \right] \\
 & + \frac{M_j(k_1)(M_j(k_1) + M_{j+1}(k_1))}{i(\delta - \omega(k_1)) + \Gamma - i\Gamma_{12}} \left[\frac{(\Gamma - i\Gamma_{12})t - i(\omega(k_1) - \delta + \omega(k_2) - \Delta)t}{e} \frac{e^{-2i\Gamma_{12}t} - i(\omega(k_1) - \delta)t}}{e} \right. \\
 & \left. - \frac{(\Gamma - i\Gamma_{12})t - i(\omega(k_1) - \delta + \omega(k_2) - \Delta)t}{e} \frac{e^{-(\Gamma + i\Gamma_{12})t}}{e} \right] \quad (B.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_3(j, j'; k_1, k_2; t) := & \frac{(M_j(k_1) + M_{j+1}(k_1))(M_j(k_2) + M_{j+1}(k_2))}{i(\delta - \omega(k_1)) + \Gamma - i\Gamma_{12}} \cdot \frac{e^{i(\delta - \omega(k_1))t} - (\Gamma - i\Gamma_{12})t}}{i(\delta - \omega(k_1)) + \Gamma - i\Gamma_{12}} \\
 & + \frac{(M_{j+1}(k_1) - M_j(k_1))(M_j(k_1) - M_{j+1}(k_1))}{i(\delta - \omega(k_1)) + \Gamma - i\Gamma_{12}} \cdot \frac{e^{i(\delta - \omega(k_1))t} - 2i\Gamma_{12}t - (\Gamma - i\Gamma_{12})t}}{i(\delta - \omega(k_1)) + \Gamma + i\Gamma_{12}} \quad (B.13)
 \end{aligned}$$

$$Q_4(p, p'; k_1, k_2; t) = \frac{M_p(k_1)(M_p(k_2) - M_{p, \text{ex}}(k_2))}{i(\Delta - \omega(k_2)) + \Gamma + i\Gamma_{\text{ex}}} \left[\frac{(r + i\Gamma_{\text{ex}})t}{e} \frac{-i(\omega(k_2) - \Delta + \omega(k_2) - \Delta)t}{e} - \frac{2k_2 t}{e} \frac{-i(\omega(k_2) - \Delta)t}{e} \right. \\ \left. - \frac{(r + i\Gamma_{\text{ex}})t}{e} \frac{-i(\omega(k_2) - \Delta + \omega(k_2) - \Delta)t}{e} - \frac{(r - i\Gamma_{\text{ex}})t}{e} \right] \quad (\text{B.14})$$

$$+ \frac{M_p(k_2)(M_p(k_2) + M_{p, \text{ex}}(k_2))}{i(\Delta - \omega(k_2)) + \Gamma + i\Gamma_{\text{ex}}} \left[\frac{(r + i\Gamma_{\text{ex}})t}{e} \frac{-i(\omega(k_2) - \Delta + \omega(k_2) - \Delta)t}{e} - \frac{(r - i\Gamma_{\text{ex}})t}{e} \right. \\ \left. - \frac{(r + i\Gamma_{\text{ex}})t}{e} \frac{-i(\omega(k_2) - \Delta + \omega(k_2) - \Delta)t}{e} - \frac{(r - i\Gamma_{\text{ex}})t}{e} \right]$$

$$Q_5(p, p'; k_1, k_2; t) = \frac{M_p(k_1) + M_{p, \text{ex}}(k_1)}{i(\Delta - \omega(k_1)) + \Gamma + i\Gamma_{\text{ex}}} \left[(M_p(k_2) + M_{p, \text{ex}}(k_2)) \frac{e}{i(\Delta - \omega(k_2)) + \Gamma + i\Gamma_{\text{ex}}} \frac{(r - i\Gamma_{\text{ex}})t}{e} \right. \\ \left. + (M_p(k_2) - M_{p, \text{ex}}(k_2)) \frac{e}{i(\Delta - \omega(k_2)) + \Gamma + i\Gamma_{\text{ex}}} \frac{(r - i\Gamma_{\text{ex}})t}{e} \right] \quad (\text{B.15})$$

$$+ \frac{M_{p, \text{ex}}(k_1) - M_p(k_1)}{i(\Delta - \omega(k_1)) + \Gamma + i\Gamma_{\text{ex}}} \left[(M_p(k_2) + M_{p, \text{ex}}(k_2)) \frac{e}{i(\Delta - \omega(k_2)) + \Gamma + i\Gamma_{\text{ex}}} \frac{(r + i\Gamma_{\text{ex}})t}{e} \right. \\ \left. + (M_p(k_2) - M_{p, \text{ex}}(k_2)) \frac{e}{i(\Delta - \omega(k_2)) + \Gamma + i\Gamma_{\text{ex}}} \frac{(r + i\Gamma_{\text{ex}})t}{e} \right]$$

c) die Dreiphotonenamplitude

$$\Psi[s; q, e, j_2; u, x, y] = -i \sum_{k_1, k_2} \sum_{j_1}^{2k_1 k_2} B[s; i\omega(k_1); q, e, j_2; k_1, k_2] \sum_{j_1}^2 F^j[s; q, j_1, j_2; k_1] \quad (\text{B.16})$$

$$-i \sum_{k_1, k_2} \sum_{j_1}^{2k_1 k_2} B[s; i(\omega(k_1) + \omega(k_2)); q, e, j_1; k_1] F^j[s; q, e, j_2; k_1, k_2]$$

$$\begin{aligned}
 \psi[t; q, q_2]_3(u_1, u_2, u_3) = & \frac{1}{4} \overline{P}_{k_1 k_2}^{u_1 u_2} e^{-i(\omega(k_1) + \omega(k_2) + \omega(k_3) - E_0 + \epsilon_0) t} \int_0^t dt' e^{i(\omega(k_1) - \delta + \omega(k_2) - \delta + \omega(k_3) - \delta) t'} \sum_{j_1} \frac{1}{j_1} \overline{g}_j(t') \times \\
 & \left\{ \overline{P}_{k'_1 k'_2}^{u_1 u_2} \left(e^{-(\Gamma - i\Gamma_0)t'} \overline{P}_1^-(j, j'; k_1, k_2, k'_1, k'_2; t, t') + e^{-(\Gamma + i\Gamma_0)t'} \overline{P}_1^+(j, j'; k_1, k_2, k'_1, k'_2; t, t') \right) \right. \\
 & + \overline{P}_{k'_1 k'_2}^{u_1 u_2} e^{-i(\delta + \omega(k'_1)) (t - t')} \left[e^{-(\Gamma - i\Gamma_0)t} \left(\overline{P}_2^-(j, j'; k_1, k'_1, k'_2, k'_3; t, t') + \overline{P}_3^-(j, j'; k_1, k'_1, k'_2, k'_3; t, t') \right) \right. \\
 & \quad \left. + e^{-(\Gamma + i\Gamma_0)t} \left(\overline{P}_2^+(j, j'; k_1, k'_1, k'_2, k'_3; t, t') + \overline{P}_3^+(j, j'; k_1, k'_1, k'_2, k'_3; t, t') \right) \right] \\
 & \left. + \overline{P}_{k'_1 k'_2}^{u_1 u_2} \left(e^{-(\Gamma - i\Gamma_0)t'} \overline{P}_4^-(j, j'; k'_1, k'_2, k'_3, t, t') + e^{-(\Gamma + i\Gamma_0)t'} \overline{P}_4^+(j, j'; k'_1, k'_2, k'_3, t, t') \right) \right\} \\
 & + \frac{1}{4} \overline{P}_{k_1 k_2}^{u_1 u_2} e^{-i(\omega(k_1) + \omega(k_2) - \delta + \epsilon_0 - E_0) t} \int_0^t dt' e^{i(\omega(k_1) - \delta + \omega(k_2) - \delta) t'} \sum_{j_1} \frac{1}{j_1} \overline{g}_j(t') \times \\
 & \times \overline{P}_{k'_1 k'_2}^{u_1 u_2} \left[e^{-(\Gamma - i\Gamma_0)t} \left(\overline{P}_5^-(j, j'; k'_1, k'_2, k'_3, t, t') + \overline{P}_6^-(j, j'; k'_1, k'_2, k'_3, t, t') \right) \right. \\
 & \quad \left. + e^{-(\Gamma + i\Gamma_0)t} \left(\overline{P}_5^+(j, j'; k'_1, k'_2, k'_3, t, t') + \overline{P}_6^+(j, j'; k'_1, k'_2, k'_3, t, t') \right) \right]
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{P}_1^\pm(j, j'; k_1, k'_1, k'_2, t, t') = & \frac{(M_{j_1}(k_1) \pm M_{j_2}(k_1)) M_{j_3}(k'_1)}{(i(\delta - \omega(k_1)) + \Gamma \mp i\Gamma_0) (i(\delta - \omega(k_1)) + \delta - \omega(k'_1)) + 2\Gamma)} \times \\
 & \times \left[\frac{M_{j_1}(k'_1) - M_{j_2}(k'_1)}{i(\delta - \omega(k'_1)) + \Gamma - i\Gamma_0} + \frac{M_{j_1}(k'_1) + M_{j_2}(k'_1)}{i(\delta - \omega(k'_1)) + \Gamma + i\Gamma_0} \right]
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{P}_2^\pm(j, j'; k_1, k'_1, k'_2, t, t') = & \frac{(M_{j_1}(k_1) \pm M_{j_2}(k_1)) (M_{j_3}(k'_1) \pm M_{j_4}(k'_1))}{(i(\delta - \omega(k_1)) + \Gamma \mp i\Gamma_0) (i(\delta - \omega(k'_1)) + \Gamma \mp i\Gamma_0)} \left[\frac{e^{-(\Gamma \mp i\Gamma_0)t'} e^{i(\delta - \omega(k_1))t'}}{e^{i(\delta - \omega(k'_1))t} + \Gamma \pm i\Gamma_0} - \right. \\
 & \left. \frac{e^{-(\Gamma \mp i\Gamma_0)t}}{e^{i(\delta - \omega(k'_1))t} + \Gamma \pm i\Gamma_0} \right]
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned}
 & - e^{-\frac{-(\Gamma \mp i\Gamma_2)t}{e}} e^{-\frac{i(\delta - \omega(k_2'))(t-t')}{e}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{i(\delta - \omega(k_2'))(\Gamma \mp i\Gamma_2)t'}{e}}}{i(\delta - \omega(k_2')) + \delta - \omega(k_2')) + 2\Gamma} \Bigg] \\
 P_3^\pm(\gamma, \gamma'; k_1, k_2, k_2'; t, t') &= \frac{(M_{j+1}(k_1) \mp M_{j+1}(k_2)) M_j(k_2') (M_j(k_2) \pm M_{j+1}(k_2'))}{(i(\delta - \omega(k_1)) + \Gamma \pm i\Gamma_2) (i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma \mp i\Gamma_2)} \left[\frac{-(\Gamma \mp i\Gamma_2)t'}{e} - e^{-\frac{i(\delta - \omega(k_2'))t'}{e}} \pm 2i\Gamma_2 t' \right. \\
 & \left. - \frac{e^{-\frac{i(\delta - \omega(k_2'))t'}{e}}}{i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma \mp i\Gamma_2} \right] \quad (B.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - e^{-\frac{-(\Gamma \mp i\Gamma_2)t}{e}} e^{-\frac{i(\delta - \omega(k_2'))(t-t')}{e}} \frac{1 - e^{-\frac{i(\delta - \omega(k_2'))(\Gamma \mp i\Gamma_2)t'}{e}}}{i(\delta - \omega(k_2')) + \delta - \omega(k_2')) + 2\Gamma} \Bigg] \\
 P_{4r}^\pm(\gamma, \gamma'; k_1, k_2, k_2'; t) &= \left[\frac{(M_{j+1}(k_1) - M_{j+1}(k_2)) M_j(k_2') (M_j(k_2) - M_{j+1}(k_2'))}{(i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma \mp i\Gamma_2) (i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma - i\Gamma_2)} + \frac{(M_j(k_2) + M_{j+1}(k_2)) M_j(k_2') (M_j(k_2) \pm M_{j+1}(k_2'))}{(i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma \pm i\Gamma_2) (i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma - i\Gamma_2)} \right] \times \\
 & \times \left[\frac{(\Gamma \pm i\Gamma_2)t}{e} \frac{e^{-\frac{i(\omega(k_2') - \delta + \omega(k_2) - \delta)t}{e}}}{i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma \pm i\Gamma_2} - \frac{e^{-\frac{i(\omega(k_2') - \delta)t}{e}}}{i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma \pm i\Gamma_2} - \frac{(\Gamma \pm i\Gamma_2)t}{e} \frac{e^{-\frac{i(\omega(k_2') - \delta + \omega(k_2) - \delta)t}{e}}}{i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma \pm i\Gamma_2} - \frac{e^{-\frac{i(\omega(k_2') - \delta)t}{e}}}{i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma \pm i\Gamma_2} \right] \quad (B.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_5^\pm(\gamma, \gamma'; k_1, k_2, k_2'; t) &= \frac{(M_{j+1}(k_2) \pm M_{j+1}(k_2)) M_j(k_2') (M_j(k_2) - M_{j+1}(k_2'))}{(i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma + i\Gamma_2) (i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma \pm i\Gamma_2)} \left[\frac{-i(\omega(k_2') - \delta)t}{e} - e^{-\frac{i(\omega(k_2') - \delta)t}{e}} \frac{(\Gamma \pm i\Gamma_2)t}{e} - \frac{i(\omega(k_2') - \delta + \omega(k_2) - \delta)t}{e} \right. \\
 & \left. - \frac{e^{-\frac{i(\omega(k_2') - \delta)t}{e}}}{i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma \pm i\Gamma_2} \right] \quad (B.22) \\
 & - \frac{e^{-\frac{i(\omega(k_2') - \delta)t}{e}}}{i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma \pm i\Gamma_2} \frac{(\Gamma \pm i\Gamma_2)t}{e} - \frac{i(\omega(k_2') - \delta + \omega(k_2) - \delta)t}{e} \Bigg]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_6^\pm(\gamma, \gamma'; k_1, k_2, k_2'; t) &= \frac{(M_j(k_2) \pm M_{j+1}(k_2)) M_j(k_2') (M_j(k_2) \mp M_{j+1}(k_2'))}{(i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma + i\Gamma_2) (i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma \pm i\Gamma_2)} \left[\frac{-i(\omega(k_2') - \delta)t}{e} \pm 2i\Gamma_2 t \frac{(\Gamma \mp i\Gamma_2)t}{e} - \frac{i(\omega(k_2') - \delta + \omega(k_2) - \delta)t}{e} \right. \\
 & \left. - \frac{e^{-\frac{i(\omega(k_2') - \delta)t}{e}}}{i(\delta - \omega(k_2')) + \Gamma \pm i\Gamma_2} \frac{(\Gamma \pm i\Gamma_2)t}{e} - \frac{i(\omega(k_2') - \delta + \omega(k_2) - \delta)t}{e} \right] \quad (B.23)
 \end{aligned}$$

An dem länglichen Ausdruck für die Dreiphotonenamplitude ist bemerkenswert, daß im Grenzfall $|\Gamma_2| \rightarrow \Gamma$ und $t \rightarrow \infty$ fast alle

Terme herausfallen bis auf diejenigen, bei denen sich alle M 's aufsummieren; das ist jeweils ein Term aus $P_1^*(n, k, k', k'; \epsilon')$ und $P_2^*(j, j', k, k', k_s, \epsilon')$. Vergleichen wir Formel (B.6b) mit (B.17), so macht sich das inzidente Photon für die angeregten Atome durch eine zusätzliche Permutationssumme bemerkbar, so daß Effekte, die schon zwischen den angeregten Atomen bestanden haben, durch das zusätzliche inzidente Photon erheblich verstärkt werden können.

Anhang C: Über die Integralgleichungen im Prozeß

Nullter Ordnung

Im §4.1 haben wir die Dynamik zweier angeregter Atome behandelt. Welche physikalischen Effekte uns durch den Gebrauch der E.N. verloren gegangen sind, soll hier erläutert werden. Gleichzeitig erhalten wir einen vertieften Einblick in die wechselseitige Verknüpfung zwischen Emissions- und Absorptionsprozessen zweier angeregter Atome. Betrachten wir die Laplacetransformierten von (3.5), so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\left\{ S+i(E_{a_1}+E_{a_2}) \right\} B[\xi; a_1, a_2]_0 = 1 - i \int d^3k \sum_{j=1}^2 H_j^v(k) B[\xi; a_j, b_{j2}]_0(k) \quad (a)$$

$$\begin{pmatrix} S+i(\omega_1(k)+E_{a_1}+E_{a_2}), & 0 \\ 0, & S+i(\omega_2(k)+E_{a_2}+E_{a_1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B[\xi; b_1, a_2]_0(k) \\ B[\xi; a_1, b_2]_0(k) \end{pmatrix} = -i \int d^3k \begin{pmatrix} H_1^v(k) \\ H_2^v(k) \end{pmatrix} B[\xi; a_1, a_2]_0(k, \nu) \quad (b)$$

$$-i \begin{pmatrix} H_2(k_1) \\ H_1(k_2) \end{pmatrix} B[\xi; b_1, b_2]_0 \quad (C.1)$$

$$\left\{ S+i(\omega_1(k)+\omega_2(k)+E_{a_1}+E_{a_2}) \right\} B[\xi; a_1, a_2]_0(k, \nu) = -i \overline{P} \sum_{j=1}^2 \sum_{k_1, k_2} H_j(k) B[\xi; b_j, a_{j2}]_0(k_1, \nu) \quad (c)$$

Setzen wir (c) in (b) ein, dann erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} B[\xi; b_1, a_2]_0(k) \\ B[\xi; a_1, b_2]_0(k) \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} B^{(0)}[i\nu, i\nu; b_1, a_2]_0 & A^{(0)}[i\nu, i\nu; b_1, a_2]_0 \\ A^{(0)*}[i\nu, i\nu; a_1, b_2]_0 & B^{(0)*}[i\nu, i\nu; a_1, b_2]_0 \end{pmatrix} \left[-i \int d^3k \begin{pmatrix} H_1^v(k) \\ H_2^v(k) \end{pmatrix} \frac{1}{S+i(\omega_1(k)+\omega_2(k)+E_{a_1}+E_{a_2})} \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} H_1(k) & H_2(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B[\xi; b_1, a_2]_0(k) \\ B[\xi; a_1, b_2]_0(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_2(k) \\ H_1(k) \end{pmatrix} B[\xi; b_1, b_2]_0 \right] \quad (C.2)$$

wobei die Bedeutung der Matrix vor der eckigen Klammer in (4.1, 4.2) erklärt wurde. Der Grund für das Auftreten der Integralgleichungen in (C.2) liegt daran, daß Photonen als Bosonen einem Symmetrisierungsprozeß unterworfen sind. Machen wir einen iterativen Ansatz, dann erhalten wir als Lösung für (C.2):

$$\begin{pmatrix} B[s, b_1, a_1]^{(n)}(k) \\ B[s, a, b_1]^{(n)}(k) \end{pmatrix} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[(-i) \begin{pmatrix} B^{(0)}[s+i\omega(k_{\nu-1}), b_1, a_2]_0, A^{(0)*}[s+i\omega(k_{\nu-1}), b_1, a_2]_0 \\ A^{(0)*}[s+i\omega(k_{\nu-1}), a, b_1]_0, B^{(0)}[s+i\omega(k_{\nu-1}), a, b_1]_0 \end{pmatrix} (-i) \int d^3x_{\nu} \begin{pmatrix} H_1^e(x_{\nu}) \\ H_2^e(x_{\nu}) \end{pmatrix} \right. \\ \left. \times \frac{1}{\omega(k_{\nu-1}) + \omega(k_{\nu}) + E_0 + E_0} (H_1(k_{\nu-1}), H_2(k_{\nu-1})) \right] \begin{pmatrix} B^{(0)}[s+i\omega(k_0), b_1, a_2]_0, A^{(0)*}[s+i\omega(k_0), b_1, a_2]_0 \\ A^{(0)*}[s+i\omega(k_0), a, b_1]_0, B^{(0)}[s+i\omega(k_0), a, b_1]_0 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} M_2(x) \\ H_1(x) \end{pmatrix} B[s, b_1, a_2]_0 \quad (C.3)$$

$k_{\nu} = k$. Die Summation über ν soll als Hintereinanderausführen des Ausdruckes in der Klammer verstanden werden. Für $\nu=0$ erhalten wir die spontane und resonante Einphotonenamplitude des Prozesses Nullter Ordnung (§4.1). Welche Effekte in der Summe $\nu \geq 1$ uns durch die E.N verloren gehen, wollen wir am Beispiel $\nu=1$ für die Amplitude $B[s, b_1, a_2]_1(k)$ explizite zeigen.

* Gegeben sei eine inhomogene Integralgleichung des Typs $\phi(k) \cdot I(k) + \int dx' K(k', k) \phi(x')$. Um sie zu lösen, machen wir folgenden iterativen Ansatz:

$$\phi^0(k) = I(k)$$

$$\phi^1(k) = \phi^0(k) + \int dx' K(k', k) \phi^0(x')$$

$$\phi^2(k) = \phi^1(k) + \int dx' K(k', k) \phi^1(x') + \int dx' K(k', k) \int dx'' K(x', k'') \phi^0(x'') \quad u.s.w.$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}[s; b_1, b_2]^{(n)}(\kappa) = & -i \left(\mathcal{B}^{(n)}[s; i\omega(\kappa); b_1, b_2]_0 \int d^3k_1 M_1^*(\kappa_1) \cdot A^{(n)}[s; i\omega(\kappa_1); b_1, b_2]_0 \int d^3k_2 M_2^*(\kappa_2) \right) \cdot \\
 & \times \left\{ -i \frac{M_1(\kappa)}{s + i(\omega(\kappa) + \omega(\kappa_1) - \epsilon_{b_1} + \epsilon_{b_2})} \left[-i \mathcal{B}^{(n)}[s; i\omega(\kappa_1); b_1, b_2]_0 M_2(\kappa_2) - i A^{(n)}[s; i\omega(\kappa_2); b_1, b_2]_0 M_1(\kappa_1) \right] \right. \\
 & \left. - i \frac{M_2(\kappa)}{s + i(\omega(\kappa) + \omega(\kappa_2) - \epsilon_{b_1} + \epsilon_{b_2})} \left[-i A^{(n)}[s; i\omega(\kappa_2); b_1, b_2]_0 M_1(\kappa_1) - i \mathcal{B}^{(n)}[s; i\omega(\kappa_1); b_1, b_2]_0 M_2(\kappa_2) \right] \right\} \mathcal{B}[s; b_1, b_2]_0.
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

Die Terme in der geschweiften Klammer besagen, daß von den beiden angeregten Atomen eines spontan mit einem Photon κ , zerfällt, während das andere angeregt bleibt. Das kann Atom A_1 oder A_2 sein. Dieses angeregte Atom ist nun mittels Laufzeiteffekten als spontane und resonante Amplitude gemäß (4.1, 4.2) mit den anderen Atomen verkoppelt. Danach emittiert es sein Photon ebenfalls, und beide Atome befinden sich im Grundzustand. Die beiden Integrale in den ersten Termen bedeuten, daß das zuerst spontan emittierte Photon κ , von einem Atom wieder absorbiert wird. Die Atome sind wieder mittels Laufzeiteffekte nach (4.1) und (4.3) miteinander verkoppelt, bis sich der Zwischenzustand "Atom A_1 angeregt, A_2 im Grundzustand und ein Photon existent" einstellt. Diesen Prozeß, bei dem die Photonen ihren "Platz" zwischen den Atomen tauschen, nennen wir Photonenaustauscheffekt. In der Formel (C.4) erkennen wir diesen Effekt daran, daß ein Term der Form $\int d^3k_1 M_1^*(\kappa_1) H(\kappa_1) \dots$ mit zwei verschiedenen Argumenten κ und κ_1 auftritt. Für alle höheren Ordnungen $n \geq 2$ wiederholt sich der Austausch der Photonen zwischen den Atomen. Die Amplitude $\mathcal{B}[s; a_1, b_2]^{(n)}(\omega)$ können wir genauso wie oben interpretieren, wenn wir die Atome A_1 und A_2 vertauschen. In der exakten Theorie sind alle Photonen mit allen Atomen über Austausch- und Laufzeiteffekt direkt miteinander verkoppelt, d.h. jedes Photon ist mindestens einmal von jedem

Atom emittiert und absorbiert worden.

Setzen wir (C.3) in (C.4) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \{s+i(E_{k_1}+E_{k_2})\} B[k_1, k_2]_0 &= 1-i \int d^3k \left(M_1^{\dagger}(k), M_2^{\dagger}(k) \right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[(-i) \left(\begin{array}{cc} B^{\nu} [s+i\omega(k_{\nu-1}), b_1, b_2]_0 & A^{\nu} [s+i\omega(k_{\nu-1}), b_1, b_2]_0 \\ A^{\nu} [s+i\omega(k_{\nu-1}), a_1, b_2]_0 & B^{\nu} [s+i\omega(k_{\nu-1}), a_1, b_2]_0 \end{array} \right) \right. \\ &\quad \times (-i) \int d^3k_{\nu} \left(\begin{array}{c} M_1^{\dagger}(k_{\nu}) \\ M_2^{\dagger}(k_{\nu}) \end{array} \right) \frac{1}{s+i(\omega(k_{\nu-1})+\omega(k_{\nu})+E_{k_{\nu-1}}+E_{k_{\nu}})} \left(\begin{array}{c} M_1(k_{\nu-1}), M_2(k_{\nu-1}) \end{array} \right) \left. \right] \times \\ &\quad \times (-i) \left(\begin{array}{cc} B^{\nu} [s+i\omega(k_{\nu}), b_1, b_2]_0 & A^{\nu} [s+i\omega(k_{\nu}), b_1, b_2]_0 \\ A^{\nu} [s+i\omega(k_{\nu}), a_1, b_2]_0 & B^{\nu} [s+i\omega(k_{\nu}), a_1, b_2]_0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} M_1(k_{\nu}) \\ M_2(k_{\nu}) \end{array} \right) B[s; b_1, b_2]_0 \end{aligned} \quad (C.5)$$

Für $\nu=0$ erhalten wir in der E.N das Ergebnis von (3.21).

Betrachten wir die Gleichung (C.5) exakt, dann erhalten wir als zusätzlichen Effekt, daß die Photonen zwischen den beiden angeregten Atomen wegen des Auftretens der Spalten, Zeilen und Matrizen in der Summe in allen möglichen Kombinationen durch Emissions-Absorptionsprozesse ausgetauscht werden, so daß für zwei angeregte Atome eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür besteht, daß sie, wenn sie beginnen zu zerfallen, schon von einander "wissen". In der E.N beginnen sie dagegen noch statistisch unabhängig zu zerfallen (B.1b). Wegen der hohen Ordnung in der Kopplungskonstanten können wir alle Austausch-effekte, die durch die Integralgleichungen bedingt sind, vernachlässigen, d.h. die E.N erfaßt bereits die entscheidenden Haupteffekte, während die Austausch-effekte nur Korrektur-terme dazu liefern.

Anhang D: Über die Integralgleichung bei Prozessen
von einem Atom und zwei Photonen

Am Beispiel eines angeregten Atoms und einem inzidenten Photon [8] können wir den Einfluß der Integralgleichung auf die Dynamik besonders anschaulich und einfach zeigen.

Die Laplacetransformationen dieses Gleichungssystems lauten:

$$\{s+i(\omega(x_1)+E_0)\} \Psi[s; b]_1(x_1) = \chi(x_1) - i \int d^3x M^y(x) \Psi[s; a]_1(x; x_1) \quad (a)$$

(D.1)

$$\{s+i(\omega(x_1)+\omega(x_2)+E_0)\} \Psi[s; a]_2(x_1, x_2) = -i \int_{x_1, x_2}^{x, x_2} M(x_1) \Psi[s; b]_1(x_1) \quad (b)$$

Setzen wir (b) in (a) ein, so erhalten wir unter Verwendung von (3.34) folgende Integralgleichung:

$$(s+i(\omega(x_1)+E_0)+i\epsilon^-) \Psi[s; b]_1(x_1) = \chi(x_1) - i \int d^3x M^y(x) \frac{M(x_1)}{s+i(\omega(x_2)+\omega(x_1)+E_0)} \Psi[s; b]_1(x) \quad (D.2)$$

Daß wir auf der linken Seite bereits die E.N im Sinne von §3.4 gebraucht haben, ist hier ohne Belang, da wir uns für solche Effekte interessieren, die hinter der Integralgleichung stehen. Mit demselben iterativen Ansatz wie in (C.3) ist die Lösung:

$$\Psi[s; b]_1(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \left[(-i)^v \frac{1}{s+i(\omega(x_{v+1})+E_0)+i\epsilon^-} \int d^3x_v M^y(x_v) \frac{M(x_{v+1})}{s+i(\omega(x_{v+1})+\omega(x_v)+E_0)} \right]^v \frac{\chi(x_1)}{s+i(\omega(x_1)+E_0)+i\epsilon^-} \quad (D.3)$$

$x_v := x$.

Die Summation über v soll als Hintereinanderausführen des Operators in der eckigen Klammer verstanden werden (analog (C.3)).

Für $n=0,1$, der Nullten und Ersten Iterationsordnung für die Integralgleichung, erhalten wir für $\Psi_{[a,b]}^{(n)}(x)$ einen Ausdruck, der einem Ansatz für ein angeregtes Atom und einem inzidenten Photon in der E.N entspräche, da für $n \geq 2$ alle zusätzlichen Terme der Summe in der E.N verschwinden (analog dem Ansatz (A.5) und (3.5)). Die Interpretation dieser Lösungen ist entsprechend dem hier behandelten Fall; d.h. die Lösungen setzen sich aus dem spontanen Zerfall des angeregten Atoms und dem Emissions-Absorptionsprozeß des angeregten Atoms mit dem inzidenten Photon zusammen.

In der E.N sind uns folgende physikalische Prozesse vorgegangen: nachdem das Atom zerfallen ist und das inzidente Photon absorbiert hat ($n=1$), reemittiert das Atom sein Photon und reabsorbiert das bereits von ihm emittierte Photon wieder ($n=2$). Für alle höheren Glieder der Summe wiederholt sich dieser Photonenaustauschprozeß zwischen den beiden Photonen und dem Atom. Hinter der Integralgleichung steckt also ein Reemissions- und Reabsorptionsprozeß zweier Photonen durch das gleiche Atom. Da wir für solche Prozesse die E.N als gute Näherung ansehen (§3.4), können wir ihre Anwendung auch für die Integralgleichung rechtfertigen.

Literaturverzeichnis

1. DIRAC, P.A.M.: Z.Physik 44, 585 (1927)
2. WEISSKOPF, V., WIGNER, E.: Z.Physik 63, 54 (1930)
3. ERNST, V., STEHLE, P.: Phys.Rev. 176, 1456 (1968)
4. GRIMM, E., ERNST, V.: J.Phys. A: Math., Nucl., Gen. 7,
1664 (1974)
5. STELZER, M., MÜHLSTEIN, J., ERNST, V.: Z.Physik B in Vor-
bereitung
6. GRIMM, E., ERNST, V.: Z.Physik A 274, 293 (1975)
7. ERNST, V.: Z.Physik 218, 111 (1969)
8. ERNST, V.: Z.Physik B 23, 113 (1976)
9. CSILLAG, L., JANOSSY, L., NARAY, Zs.: Acta Phys.Hung. 32,
275 (1972)
10. DICKE, R.H.: Phys.Rev. 93, 99 (1954)
11. SCHTABL, F., THIRRING, W.: Ergeb.Exakt.Naturw. 36, 219 (1964)
12. SCHWENDIMANN, P.: Z.Physik 267 (1973)
13. REHLER, N.E., EBERLY, J.H.: Phys.Rev. A 3, 1735 (1971)
14. JODOIN, R., MANDEL, L.: Phys.Rev. A 9, 873 (1974)
15. WEISSKOPF, V.: Ann.Phys. (Leipzig) 9, 23 (1931)
16. MÜHLSTEIN, J., ERNST, V.: Ann.Phys. (Leipzig) in Vorbereitung
17. BJORKEN, J.D., DRELL, S.D.: Relativistic Quantum Field Theory,
New York: McGraw-Hill 1965
18. ERNST, V.: J.Phys. A: Math., Gen. 8, 76 (1975)
19. STELZER, M.: Diplomarbeit, Universität München (1973)
20. SINHA, K.: Helv.Phys.Acta 45, 619 (1972)

Herrn Priv.Doiz.Dr. V. ERNST danke ich für seine ständige Betreuung und Anregung zu dieser Arbeit. Herrn Prof.Dr. F. BOPP danke ich für die Aufnahme in sein Institut und für die Bereitstellung von Institutsmitteln.

Ferner sei den Herrn Dipl.Phys. E. GRIMM und J. MÜHLSTEIN für zahlreiche anregende Gespräche gedankt.

Die hier vorgelegten Ergebnisse wurden im Verlauf eines mit DFG-Mitteln finanzierten Forschungsprogramms erarbeitet.

Lebenslauf

Als erstes Kind des Juristen Hanns Stelzer (+1946) und dessen Ehefrau Hedwig, geb. Lüttmer, wurde ich, Michael Stelzer, am 5. Mai 1945 in Lindaunis bei Schleswig geboren. Aufgewachsen und in die Schule gegangen bin ich in Hamburg und machte in Cuxhaven im März 1966 das Abitur.

Im Sommersemester 1966 begann ich an der Universität Hamburg das Physikstudium, das ich in Tübingen (WS 1968/69-SS 1969) fortsetzte und in München im Juli 1973 mit der Diplom-Hauptprüfung abschloß. Die theoretische Diplomarbeit unter der Leitung von Priv.Doiz.Dr. V. Ernst hatte das Thema: "Der dreidimensionale quantenmechanische harmonische Oszillator in Wechselwirkung mit einem skalaren Strahlungsfeld in Nullter und Erster Weisskopf-Wigner Näherung".

Im Wintersemester 1973/74 begann ich unter der wissenschaftlichen Leitung von Priv.Doiz.Dr. V. Ernst die Untersuchungen zur vorliegenden Dissertation am Lehrstuhl Prof. Dr. F. Bopp der Sektion Physik.

